

Anais da

XXXIII Semana Acadêmica da Matemática 2019

Anais da
XXXIII Semana Acadêmica
da Matemática

29/10/2019 a 01/11/2019

Comissão organizadora da XXXIII Semana Acadêmica da Matemática:

Fabiana Magda Garcia Papani (Coordenadora)
Arlení Elise Sella Langer
Cintya Akemi Okawa
Clezio Aparecido Braga
Dulcyene Maria Ribeiro
Geicimara Lopes
João Alfredo Simon Santos
Laura Massuda Crema
Mariana Thais Garcia
Rosângela Villwock
Sandro Marcos Guzzo

Comitê científico:

Adriele Carolini Waideman	Emanuelli Pereira
Alessandra dos Santos	Emerson Mario Boldo
André Vicente	Fabiana Magda Garcia Papani
Andréia Büttner Ciani	Flávio Roberto Dias Silva
Arlení Elise Sella Langer	Francieli Cristina Agostinetto Antunes
Clezio Aparecido Braga	Márcia Regina Kaminski
Daniel Zampieri Loureiro	Pamela Gonçalves
Daniela Maria Grande Vicente	Paulo Domingos Conejo
Davi Cezar Da Silva	Rosângela Villwock
Dulcyene Maria Ribeiro	Sandro Marcos Guzzo
Elhane de Fatima Fritsch Cararo	
Eliane Siviero da Silva Dalbon	

Arte da Capa:

Clezio Aparecido Braga

Diagramação:

Sandro Marcos Guzzo

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S471a	Semana Acadêmica de Matemática (33. : 2019: Cascavel – PR)
	Anais da XXXIII Semana Acadêmica de Matemática / Fabiana Magda Garcia Papani (Coordenadora). --- Cascavel (PR): UNIOESTE, 2019. 347p.
	ISSN 2526-0804
	Vários autores
	Inclui índice de autores
	Evento realizado no Campus de Cascavel no período de 29/10/2019 a 01/11/2019
	1. Matemática-Estudo e Ensino. 2. Ensino superior - Evento. I. Papani, Fabiana Magda Garcia (Coord.). II. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. III. Título.
	CDD 20.ed. 510.0711

Rosângela A. A. Silva – CRB 9º/1810

Apresentação

A Semana Acadêmica da Matemática está na sua XXXIII edição. Este é o evento de extensão mais tradicional promovido pelo Curso de Matemática, da UNIOESTE campus de Cascavel. É um evento com periodicidade anual.

Na programação da XXXIII Semana Acadêmica de Matemática figuram palestras, minicursos e comunicações orais. As comunicações orais resultam da inscrição dos participantes na modalidade de apresentadores de trabalhos.

Nesta edição da Semana Acadêmica de Matemática, 34 trabalhos foram inscritos e aceitos para apresentação oral e publicação nos anais do evento. São em geral trabalhos resultados das pesquisas de Iniciação Científica e de Monografia desenvolvidos por alunos do curso de Matemática. Registramos também trabalhos realizados por professores do Curso de Matemática da UNIOESTE - Cascavel, e de alunos de outros cursos que desenvolveram suas pesquisas com teor matemático. A apresentação destes trabalhos no evento tem o objetivo de compartilhar os conhecimentos adquiridos pelos alunos e professores nos seus respectivos projetos. O registro destes trabalhos servirá para que os futuros alunos possam também fazer uso deste conhecimento.

A comissão organizadora agradece aos autores pelo envio dos trabalhos e também à comissão científica pelas contribuições dadas durante o processo de avaliação e correção dos trabalhos.

A comissão organizadora.

Índice de trabalhos

Homomorfismos entre grupos de Lie	11
Transformada de Laplace e duas aplicações de EDOs na engenharia civil	19
Uma prova clássica para o Teorema Fundamental da Álgebra à luz da Análise Complexa	31
A Representação de Weierstrass: uma solução para o problema de Lagrange	43
A modelagem matemática como metodologia no ensino de funções: relato de uma experiência	55
Uma experiência com função de segundo grau sob a perspectiva da resolução de problemas	65
Juros continuamente compostos: uma introdução	75
O teorema do valor médio para derivada fracionária de Caputo	87
Materiais manipulativos: uma opção metodológica para trabalhar geometria espacial	99
Funções de Mittag-Leffler e aplicações	109
O teorema fundamental do cálculo fracionário de Riemann-Liouville	121
Preliminares matemáticos para compressão de dados: transformadas de Fourier	133
O trabalho com jogos no estágio supervisionado I	143
Análise e descrição da dependência espacial de três propriedades químicas do solo	151

Construção dos números reais via cortes de Dedekind	161
Quadrado Mágico: uma proposta de ensino para introduzir o conceito de Progressão Aritmética	171
Análise da produção escrita de uma tarefa envolvendo o conceito de razão	181
Abordagem epistemológica de função afim	191
Equação do Calor	203
Enumerabilidade dos conjuntos numéricos	215
Estudo de simetrias e regularidades em funções polinomiais cúbicas pela perspectiva da geometria analítica	221
Utilização de softwares para construção de gráficos	231
Reflexões acerca dos obstáculos vivenciados durante estágio supervisionado	237
Otimização Convexa	249
O Teorema Espectral para Operadores Simétricos	255
Deduzindo o teorema de Pitágoras com papel sulfite	267
Uma experiência com o uso de Realidade Virtual em sala de aula no ensino de matemática	275
Um estudo histórico sobre a fórmula geral para a resolução da equação de segundo grau	281
Modelagem Matemática como instrumento na educação financeira	289
Uma articulação entre Modelos Matemáticos e a Educação Matemática Crítica	295
Análise da produção escrita dos alunos em um primeiro contato com a disciplina de Cálculo I	307
Um relato de experiência: da teoria à prática no ensino de matrizes	317

A primeira experiência com jogos: Dominó de Funções e Dominó das Proporções 327

Derivabilidade e diferenciabilidade no ensino do cálculo 335

Homomorfismos entre grupos de Lie

Valdecir de Oliveira Teixeira¹
Acadêmico do PGMAC - Universidade Estadual de Londrina
valdecirdeoliveirateixeira@hotmail.com

Resumo: Neste trabalho estudamos algumas proposições sobre homomorfismos entre grupos de Lie, e em particular, estudamos um resultado sobre a relação entre as representações de grupo e ações por grupo.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Variedades Suaves; Grupos de Lie.

1 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentamos definições e resultados que serão usados posteriormente. O desenvolvimento do conteúdo dessa seção pode ser visto com mais detalhes nas referências (LEE, 2013) e (MARTIN, 2017).

Definição 1. Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma **variedade topológica de dimensão n** ou uma **n -variedade topológica** se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- a) M é um **espaço de Hausdorff**: para cada par de pontos distintos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.
- b) M é **segundo enumerável**: existe um base enumerável para a topologia de M .
- c) M é **localmente Euclidiano de dimensão n** : cada ponto de M tem uma vizinhança homeomórfica a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2. Seja M uma n -variedade topológica. Uma **carta coordenada** (ou apenas **carta**) em M é um par (U, φ) , onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ é um homeomorfismo de U em um subconjunto aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sejam (U, φ) e (V, ψ) duas cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, o mapa composto $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é chamado de **mapa de transição de φ para ψ** . Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são ditas **suavemente compatíveis** se $U \cap V = \emptyset$ ou se o mapa de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo.

Definição 3. Um conjunto de cartas cujo domínio cobrem a variedade topológica M é chamado de **atlas para M** . Um atlas é chamado de **atlas suave** se duas cartas arbitrárias neste atlas são suavemente compatíveis. Um atlas em M é **maximal** se não está propriamente contido em um atlas suave maior.

Definição 4. Se M é uma variedade topológica, uma **estrutura suave em M** é um atlas suave maximal. Uma **variedade suave** é uma variedade topológica dotada com uma estrutura suave em M .

¹Agradeço à fundação CAPES pelo apoio financeiro

Definição 5. Sejam M e N variedades suaves e seja $F: M \rightarrow N$ um mapa qualquer. Dizemos que F é um **mapa suave** se para cada $p \in M$, existem cartas suaves (U, φ) contendo p e (V, ψ) contendo $F(p)$ tal que $F(U) \subseteq V$ e o mapa composto $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é suave de $\varphi(U)$ para $\psi(V)$.

Definição 6. Seja M uma variedade suave e $p \in M$. Um mapa linear $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de **derivação em p** se satisfaz

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p , denotado por T_pM , é um espaço vetorial chamado de **espaço tangente para M em p** .

Definição 7. Sejam M e N variedades suaves e $F: M \rightarrow N$ um mapa suave, então para cada $p \in M$ definimos um mapa

$$dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N,$$

chamado de **diferencial de F em p** , por: dado $v \in T_pM$ seja $dF_p(v)$ a derivação em $F(p)$ que age em $f \in C^\infty(N)$ pela regra

$$dF_p(v)f = v(f \circ F).$$

Definição 8. Sejam M e N variedades suaves. Dado um mapa suave $F: M \rightarrow N$ e $p \in M$, definimos o **posto de F em p** como o posto do mapa linear $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, isto é, a dimensão da imagem de dF_p . Se F tem o mesmo posto r em cada ponto, dizemos que tem **posto constante** e denotamos $\text{rank } F = r$.

A proposição a seguir será usada para mostrar que todo homomorfismo entre grupos de Lie tem posto constante.

Proposição 9. Sejam M , N e P variedades suaves, e sejam $F: M \rightarrow N$ e $G: N \rightarrow P$ mapas suaves e $p \in M$. Nessas condições, valem as seguintes afirmações:

- a) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p: T_pM \rightarrow T_{G \circ F(p)}P$.
- b) Se F é um difeomorfismo, então $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Definição 10. Sejam M e N variedades suaves. Um mapa suave $F: M \rightarrow N$ é chamado de **submersão suave** se o seu diferencial é sobrejetivo em cada ponto (ou equivalentemente, se $\text{rank } F = \dim N$). É chamado de **imersão suave** se o seu diferencial é injetivo em cada ponto (ou equivalentemente, se $\text{rank } F = \dim M$).

Teorema 11. Sejam M e N variedades suaves e $F: M \rightarrow N$ um mapa suave de posto constante.

- a) Se F é sobrejetivo então é uma submersão suave.
- b) Se F é injetivo então é uma imersão suave.
- c) Se F é bijetivo então é um difeomorfismo.

Definição 12. Sejam M e N variedades suaves. Um **mergulho de M em N** é uma imersão suave $F: M \rightarrow N$ que é também um mergulho topológico, isto é, um homeomorfismo sobre sua imagem $F(M) \subseteq N$ na topologia do subespaço.

Definição 13. Seja M uma variedade suave. Uma **subvariedade mergulhada de M** é um subconjunto $S \subseteq M$ que é uma variedade na topologia do subespaço, dotada com uma estrutura suave com respeito à qual o mapa de inclusão $S \hookrightarrow M$ é um mergulho suave. Uma **subvariedade imersa de M** é um subconjunto $S \subseteq M$ dotado com uma topologia (não necessariamente a topologia do subespaço) com respeito à qual é uma variedade topológica, e uma estrutura suave com respeito à qual o mapa de inclusão $S \hookrightarrow M$ é uma imersão suave. Definimos a **codimensão de S em M** como sendo o número $\dim M - \dim S$.

Proposição 14. *Seja M uma variedade suave. As subvariedades mergulhadas de codimensão 0 em M são exatamente as subvariedades abertas.*

Teorema 15. *Sejam M e N variedades suaves e seja $\phi: M \rightarrow N$ um mapa suave com posto constante r . Todo conjunto $\phi^{-1}(c)$, para qualquer $c \in N$, é uma subvariedade propriamente mergulhada de codimensão r em M .*

Proposição 16. *Sejam M e N variedades suaves e $F: N \rightarrow M$ uma imersão suave injetiva. Seja $S = F(N)$. Então S tem uma única topologia e estrutura suave tal que é uma subvariedade suave de M e tal que $F: N \rightarrow S$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.*

Proposição 17. *Seja M uma variedade suave e $S \subseteq M$ uma subvariedade mergulhada. Então todo mapa suave $F: N \rightarrow M$ cuja imagem está contida em S é também suave de N para S .*

Definição 18. Um **grupo de Lie** é uma variedade suave G que é também um grupo no sentido algébrico, satisfazendo as seguintes propriedades:

- a) o mapa de multiplicação $m: G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$ é um mapa suave e
- b) o mapa de inversão $i: G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ é suave (e portanto, um homeomorfismo, pois $i^{-1} = i$).

Proposição 19. *Se G é uma variedade suave com uma estrutura de grupo tal que o mapa $q: G \times G \rightarrow G$, definido por $q(g, h) \mapsto gh^{-1}$ é suave, então G é um grupo de Lie.*

Prova. De fato, q é suave se os mapas de multiplicação e inversão são suaves. Reciprocamente, se q é suave então

$$g \xrightarrow{\iota} (e, g) \xrightarrow{q} g^{-1}$$

é suave e, portanto, $m(g, h) = q(g, h^{-1})$ é suave. □

Definição 20. Se G é um grupo de Lie, cada elemento $g \in G$ define os seguintes mapas:

- a) **translação à esquerda** $L_g: G \rightarrow G$, $L_g(h) = gh$,
- b) **translação à direita** $R_g: G \rightarrow G$, $R_g(h) = hg$,
- c) **conjugação** $C_g: G \rightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Como L_g pode ser expressada como a composição de mapas suaves

$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G,$$

onde $\iota_g(h) = (g, h)$ é o mapa de inclusão e m é o mapa de multiplicação, segue que L_g é suave. Além disso, L_g é um difeomorfismo, pois $L_{g^{-1}}$ é uma inversa suave:

$$(L_g \circ L_{g^{-1}})(h) = L_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h,$$

e

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = h.$$

Logo, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Analogamente, $R_g: G \longrightarrow G$ é um difeomorfismo.

Exemplo 1. O grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$: Os elementos deste grupo são as matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais, ou, o que é essencialmente a mesma coisa, as transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita. Este conjunto é uma subvariedade aberta do espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $M(n, \mathbb{R})$, isto é, do $\mathbb{R}^{n^2}$. Ele é formado por duas componentes conexas, determinadas pelo sinal do determinante. Uma delas é

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}); \det g > 0\},$$

o qual é um subgrupo do $GL(n, \mathbb{R})$, pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ e $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. A outra componente conexa é formada pelas matrizes com determinante menor que 0 e não é um subgrupo.

A estrutura de grupo em $GL(n, \mathbb{R})$ é dada pelo produto usual entre matrizes. Se $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$ são duas matrizes $n \times n$, então $Z = XY = (z_{ij})$ é dado por

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj},$$

o qual é uma aplicação polinomial nas variáveis x_{ij} e y_{ij} . Portanto, o produto entre matrizes é uma aplicação suave. Por esta razão $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Exemplo 2. Seja V um espaço vetorial real. $GL(V)$ denota o conjunto dos mapas lineares invertíveis de V em V . É um grupo sob a composição. Se V tem dimensão finita n , qualquer base para V determina um isomorfismo de $GL(V)$ com $GL(n, \mathbb{R})$. Portanto $GL(V)$ é um grupo de Lie. O mapa de transição entre quaisquer dois isomorfismos é dado pelo mapa da forma $A \mapsto BAB^{-1}$ (B é a matriz de transição entre as duas bases) o qual é suave. A estrutura suave em $GL(V)$ independe da base.

2 Homomorfismos entre grupos de Lie

Nesta seção serão estudados alguns resultados sobre homomorfismos entre grupos de Lie.

Definição 21. Sejam G e H grupos de Lie. Um homomorfismo $F: G \longrightarrow H$ suave é chamado de **homomorfismo entre grupos de Lie**. Se F é também um difeomorfismo, o qual implica que ele tem um inversa que é também um homomorfismo, então dizemos que F é um **isomorfismo entre grupos de Lie**. Neste caso dizemos que G e H são **grupos de Lie isomórficos**.

Exemplo 3. A função determinante $\det: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ é suave pois $\det A$ é um polinômio gerado pelas entradas da matriz A . É um homomorfismo entre grupos de Lie pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exemplo 4. Se G é um grupo de Lie e $g \in G$, o mapa de conjugação por g , $C_g: G \rightarrow G$ dado por $C_g(h) = ghg^{-1}$ é um homomorfismo entre grupos de Lie pois as operações de multiplicação e inversão definidas no grupo são suaves, logo C_g é suave. Além disso, como $C_{g^{-1}} = (C_g)^{-1}$, pois:

$$(C_g \circ C_{g^{-1}})(h) = C_g(g^{-1}h(g^{-1})^{-1}) = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h,$$

e

$$(C_{g^{-1}} \circ C_g)(h) = C_{g^{-1}}(ghg^{-1}) = g^{-1}(ghg^{-1})(g^{-1})^{-1} = h.$$

Logo C_g é um isomorfismo entre grupos de Lie.

Teorema 22. *Todo homomorfismo entre grupos de Lie tem posto constante.*

Prova. Seja $F: G \rightarrow H$ um homomorfismo entre grupos de Lie, e seja e e $\tilde{e}$ os elementos identidade de G e H respectivamente. Suponha que g_0 é um elemento qualquer de G . Mostraremos que dF_{g_0} tem o mesmo posto que dF_e . Com efeito,

$$(F \circ L_g)(h) = F(gh) = F(g)F(h) = (L_{F(g)} \circ F)(h) \implies F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F.$$

Tomando a diferencial em ambos os lados e usando a proposição (9) parte (a), temos

$$dF_{g_0} \circ d(L_{g_0})_e = d(L_{F(g_0)})_{\tilde{e}} \circ dF_e.$$

Como L_{g_0} e $L_{F(g_0)}$ são difeomorfismos, segue que ambos $d(L_{g_0})_e$ e $d(L_{F(g_0)})_{\tilde{e}}$ são isomorfismos (Prop.(9) parte (b)). Como a composição de isomorfismos não muda o posto de um mapa linear, segue que dF_{g_0} e dF_e têm o mesmo posto. $\square$

Corolário 23. *Um homomorfismo entre grupos de Lie é um isomorfismo entre grupos de Lie se e somente se é bijetivo.*

Prova. Pelo teorema 22 seguido pelo teorema 11 temos que um homomorfismo entre grupos de Lie bijetivo é um difeomorfismo. $\square$

Definição 24. Seja G um grupo de Lie. Um **subgrupo de Lie de G** é um subgrupo de G dotado com uma topologia e uma estrutura suave que o torna um grupo de Lie e uma subvariedade imersa de G .

Proposição 25. *Seja G um grupo de Lie, e seja $H \subseteq G$ um subgrupo que é também uma subvariedade mergulhada. Então H é um subgrupo de Lie.*

Prova. Seja $\mu: G \times G \rightarrow G$ a multiplicação em G . Desde que H é uma subvariedade imersa de G , o mapa de inclusão $\iota: H \hookrightarrow G$ é suave. Conseqüentemente, o mapa de inclusão $\iota \times \iota: H \times H \hookrightarrow G \times G$ é suave, e a composição $\mu \circ (\iota \times \iota): H \times H \hookrightarrow G$ é suave. Pela proposição 17, como H é uma subvariedade mergulhada de G , o mapa induzido $\bar{\mu}: H \times H \rightarrow H$ é suave. Analogamente para a inversão. $\square$

Proposição 26. *Seja $F: G \rightarrow H$ um homomorfismo entre grupos de Lie. O núcleo de F é um subgrupo de Lie propriamente mergulhado de G , cuja dimensão é igual ao posto de F .*

Prova. Como F tem posto constante, seu núcleo $F^{-1}(e)$ é uma subvariedade propriamente mergulhada de codimensão igual ao posto de F (pelo teorema 15). Ele é portanto um subgrupo de Lie pela proposição 25. $\square$

Proposição 27. *Se $F: G \rightarrow H$ é um homomorfismo injetivo entre grupos de Lie, então a imagem de F tem uma única estrutura de variedade suave tal que $F(G)$ é um subgrupo de Lie de H e $F: G \rightarrow F(G)$ é um isomorfismo entre grupos de Lie.*

Prova. Desde que um homomorfismo entre grupos de Lie tem posto constante, segue do teorema 11, que F é uma imersão suave. A proposição 16 mostra que $F(G)$ tem uma única estrutura de variedade suave para a qual $F(G)$ é uma subvariedade imersa de H e F é um difeomorfismo sobre sua imagem. $F(G)$ é um grupo de Lie, pois G o é, logo é um subgrupo de Lie. Como $F: G \rightarrow F(G)$ é um isomorfismo entre grupos e um difeomorfismo, ele é um isomorfismo entre grupos de Lie. $\square$

Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é quando o contra-domínio é o grupo das transformações lineares invertíveis de V , denotado por $GL(V)$.

Definição 28. Seja G um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita. O homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$ é chamado **representação de G** no espaço vetorial V . O espaço V é chamado o **espaço da representação**. Se a representação $\rho: G \rightarrow GL(V)$ é injetiva, ela é dita ser **fiel**.

Exemplo 5. Se G é um subgrupo de Lie qualquer de $GL(n, \mathbb{R})$, o mapa de inclusão $G \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$ é uma representação fiel.

As aplicações mais importantes de grupos de Lie para a teoria das variedades suaves envolve ações por grupos de Lie em outras variedades.

Definição 29. Seja G um grupo de Lie e M um conjunto, uma **ação à esquerda de G em M** é um mapa $G \times M \rightarrow M$, que leva $(g, p) \mapsto g \cdot p$ e satisfaz

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (g_2 \cdot p) &= (g_1 g_2) \cdot p \quad \text{para todo } g_1, g_2 \in G \text{ e } p \in M; \\ e \cdot p &= p \quad \text{para todo } p \in M. \end{aligned}$$

Uma **ação à direita** é definida analogamente como um mapa $M \times G \rightarrow M$ com a apropriada lei de composição:

$$\begin{aligned} (p \cdot g_1) \cdot g_2 &= p \cdot (g_1 g_2) \quad \text{para todo } g_1, g_2 \in G \text{ e } p \in M; \\ p \cdot e &= p \quad \text{para todo } p \in M. \end{aligned}$$

Se M é uma variedade suave, G é um grupo de Lie e o mapa definido é suave, então a ação é dita ser uma **ação suave**.

Exemplo 6. A ação natural de $GL(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ é a ação à esquerda dada pela multiplicação por matriz: $(A, x) \mapsto Ax$, considerando $x \in \mathbb{R}^n$ como uma matriz coluna. É uma ação pois $I_n x = x$ e a multiplicação por matriz é associativa: $(AB)x = A(Bx)$. É suave pois as componentes de Ax dependem polinomialmente das entradas da matriz A e das componentes de x .

Exemplo 7. Todo grupo de Lie age suavemente em si mesmo pela translação à esquerda. Dados dois pontos $g_1, g_2 \in G$ arbitrários, existe uma única translação à esquerda de G levando g_1 para g_2 , dada por $g_2 g_1^{-1}$.

Exemplo 8. Todo grupo de Lie age suavemente em si mesmo pela conjugação: $g \cdot h = ghg^{-1}$.

Definição 30. Seja G um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma ação de G em V é dita ser uma **ação linear** se para cada $g \in G$, o mapa de V em si mesmo, dado por $x \mapsto g \cdot x$ é linear.

Existe uma relação próxima entre representações e ações por grupos de Lie. Por exemplo, se $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de G , existe uma ação linear suave de G em V dada por $g \cdot x = \rho(g)x$. O próximo teorema mostra que toda ação linear é deste tipo.

Teorema 31. *Seja G um grupo de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma ação à esquerda suave de G em V é linear se, e somente se, é da forma $g \cdot x = \rho(g)x$ para alguma representação ρ de G .*

Prova. Toda ação induzida por uma representação é linear:

$$\begin{aligned} g \cdot (\alpha x + y) &= \rho(g)(\alpha x + y) \\ &= \alpha \rho(g)x + \rho(g)y \\ &= \alpha(g \cdot x) + g \cdot y \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$ e $g \in G$.

Por outro lado, para cada $g \in G$ existe um mapa linear $\rho(g) \in GL(V)$ tal que $g \cdot x = \rho(g)x$ é uma ação linear à esquerda suave para todo $x \in V$. Primeiro vamos mostrar que ρ é um homomorfismo. Com efeito, para $g_1, g_2 \in G$ temos:

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1 g_2)e = (g_1 g_2) \cdot e = g_1 \cdot (g_2 \cdot e) = g_1 \cdot \rho(g_2)e = g_1 \cdot \rho(g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2).$$

Portanto $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ é um homomorfismo entre grupos de Lie.

Para concluirmos que ρ é uma representação entre grupos de Lie, resta mostrarmos que é suave. Escolha uma base $(E_i)_{i=1}^n$ para V e para cada i , seja $\pi^i: V \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção sobre a i -ésima coordenada com respeito a esta base:

$$\pi^i \left(\sum_{j=1}^n x^j E_j \right) = x^i.$$

Denotando por $\rho_j^i(g)$ as entradas da matriz $\rho(g)$ com respeito a esta base, segue que

$$\rho(g)E_i = g \cdot E_i \implies \rho_j^i(g) = \pi^j(g \cdot E_i),$$

de modo que cada $\rho_j^i(g)$ é composição de funções suaves. Como as entradas da matriz formam uma coordenada suave global para $GL(V)$, logo ρ é suave. $\square$

Referências

LEE, John M. Introduction to Smooth Manifolds. 2. ed. Springer, 2013.

MARTIN, L. A. B. S. Grupos de Lie. 1. ed. Unicamp, 2017.

Transformada de Laplace e duas aplicações de EDOs na engenharia civil

Viviane dos Santos Costa¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
vivi.costa.2000@gmail.com

Daniela Maria Grande Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
daniela.grande@unioeste.br

Resumo: Neste trabalho é apresentada uma breve introdução sobre a Transformada de Laplace e como utilizá-la para resolver problemas envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) com coeficientes constantes. Como complemento deste tema, são demonstradas duas aplicações das EDOs na área da Engenharia Civil, sendo uma delas utilizando a Transformada de Laplace e outra aplicando o método da equação característica.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Deflexão de vigas; Flambagem de colunas.

1 Introdução

Diversos são os fenômenos que regem o mundo físico, muitas vezes, há interesse em estudar alguns deles, visto que podem interferir profundamente na vida humana, como é o caso, por exemplo, do crescimento populacional, dissipação de poluentes em corpos d'água, ou recalques de edificações. Os casos citados, assim como muitos outros, são regidos por funções que podem não ser conhecidas, no entanto, é possível definir as taxas de variação, ou seja, encontrar suas derivadas. Nesse ponto, surgem as equações diferenciais, que são equações que contêm derivadas, e são de grande utilidade para encontrar as funções desconhecidas que se deseja estudar.

O presente trabalho trata especialmente de um método para resolução de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, conhecido como Transformada de Laplace. Tal ferramenta utiliza conhecimentos básicos sobre integrais impróprias e vários teoremas, que permitem transformar a solução de uma equação diferencial em uma equação algébrica, tornando muito mais fácil encontrar a resposta deste tipo de problema.

Para demonstrar a importância das equações diferenciais e a utilidade da Transformada de Laplace, são apresentadas duas aplicações dos conhecimentos estudados, que tem como foco a área da engenharia civil, mais especificamente os problemas de deflexão de vigas e flambagem de colunas.

¹Agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro

2 Definição da Transformada de Laplace

Esta primeira seção é destinada à apresentação da principal ferramenta utilizada neste trabalho, que permite a simplificação de problemas envolvendo EDOs com coeficientes constantes. Os resultados e exemplos aqui descritos podem ser encontrados em Boyce (2010).

Para melhor estudar este conteúdo, é necessário rever o conceito de funções seccionalmente contínuas ou contínuas por partes. Essas funções são definidas em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se esse intervalo puder ser dividido em subintervalos por um número finito de pontos como $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, tal que a função seja contínua em cada subintervalo aberto e que tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos em seu interior, ou seja, as descontinuidades existentes nos pontos t_i devem ser do tipo salto. Desse modo, a integral de uma função seccionalmente contínua num intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ é dada por $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t)dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{\beta} f(t)dt$. Porém, mesmo que essa integral exista para todo $\beta > \alpha$, a convergência da integral imprópria $\int_{\alpha}^{\infty} f(t)dt$ não estará totalmente garantida. Para garantir a convergência, muitas vezes é necessário usar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se f for seccionalmente contínua para $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^{\infty} g(t)dt$ converge, então $\int_a^{\infty} f(t)dt$ também converge. No entanto, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^{\infty} g(t)dt$ diverge, então $\int_a^{\infty} f(t)dt$ também diverge.*

Partindo para o estudo das transformadas integrais, estas são relações da forma $F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t)f(t)dt$, onde $K(s, t)$, α e β são dados, $K(s, t)$ é uma função chamada núcleo da transformação e $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Existem várias transformadas integrais, porém, neste trabalho, será estudada apenas a Transformada de Laplace.

Definição 2. Essa transformada é dada por $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ sempre que essa integral convergir

O núcleo dessa transformada é $K(s, t) = e^{-st}$ e sua utilização consiste em transformar um problema de valor inicial para uma função desconhecida $f(t)$ em um problema algébrico para $F(s)$, depois resolvê-lo e encontrar $F(s)$ e, dela, extrair a função $f(t)$, no processo de inversão da transformada. O teorema a seguir enuncia as condições de existência dessa transformada:

Teorema 3. *Suponha que:*

- 1) *f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ para qualquer A positivo.*
- 2) *$|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$. Nesta desigualdade, K, a e M são constantes reais com K e M necessariamente positivas.*

Então, a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

Para provar este teorema, escreve-se:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^M e^{-st}f(t)dt + \int_M^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Então, a primeira integral à direita do sinal de igualdade existe de acordo com a primeira hipótese do teorema. Já para $\int_M^{\infty} e^{-st}f(t)dt$, utiliza-se a segunda hipótese para escrever

$|e^{-st}f(t)| < e^{-st}Ke^{at} = Ke^{(a-s)t}$ e assim tem-se $\int_M^\infty Ke^{(a-s)t}dt$ que, como $s > a$, será convergente e, pelo Teorema 1, $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ existe e é convergente. A segunda hipótese do teorema 3 indica que a função $f(t)$ deve ser de **ordem exponencial**, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$, essa função não deve crescer mais rapidamente do que Ke^{at} .

A Transformada de Laplace é um operador linear, de modo que se pode escrever:

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Exemplo 1. Encontre a Transformada de Laplace das seguintes funções:

$$(a)f(t) = t^2 \quad (b)f(t) = \cos(at), \text{ onde } a \text{ é uma constante real.}$$

$$(a) \text{ A Transformada de Laplace será dada por } \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t^2 e^{-st} dt.$$

Fazendo $u = t^2$, $dv = e^{-st}$, $du = 2t$, $v = -\frac{e^{-st}}{s}$ e integrando por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t^2 e^{-st} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left. -\frac{t^2}{s} e^{-st} \right|_0^A - \int_0^A \frac{-2t}{s} e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{t^2}{s} e^{-st} - \frac{2t}{s^2} e^{-st} - \frac{2}{s^3} e^{-st} \right) \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{A^2}{s} e^{-sA} - \frac{2A}{s^2} e^{-sA} - \frac{2}{s^3} e^{-sA} + \frac{2}{s^3} e^{-s \cdot 0} \right) = \frac{2}{s^3} \quad s > 0 \end{aligned}$$

(b) A Transformada de Laplace é dada por $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \cos(at)e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(at)e^{-st} dt$. Fazendo $u = \cos(at)$, $dv = e^{-st}$, $du = -a \cdot \sin(at)$, $v = -\frac{e^{-st}}{s}$ e integrando por partes, tem-se:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(at)e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left. -\frac{\cos(at)e^{-st}}{s} \right|_0^A - \int_0^A \frac{a}{s} \sin(at)e^{-st} dt \right) \quad (1)$$

e

$$\int_0^A \sin(at)e^{-st} dt = \left. -\frac{\sin(at)e^{-st}}{s} \right|_0^A - \int_0^A -\frac{a}{s} \cos(at)e^{-st} dt \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(at)e^{-st} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left. -\frac{\cos(at)e^{-st}}{s} \right|_0^A - \frac{a}{s} \left[\left. -\frac{\sin(at)e^{-st}}{s} \right|_0^A + \frac{a}{s} \int_0^A \cos(at)e^{-st} dt \right] \right) \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos(at)e^{-st} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\left. -\frac{s \cdot \cos(at)e^{-st}}{a^2 + s^2} + \frac{a \cdot \sin(at)e^{-st}}{a^2 + s^2} \right|_0^A \right. \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{s \cdot \cos(aA)e^{-sA}}{a^2 + s^2} + \frac{s \cdot \cos(0)e^0}{a^2 + s^2} + \frac{a \cdot \sin(aA)e^{-sA}}{a^2 + s^2} - \frac{a \cdot \sin(0)e^0}{a^2 + s^2} \right] = \frac{s}{a^2 + s^2} \end{aligned}$$

Os resultados de (a) e (b) são, respectivamente, $F(t) = \frac{2}{s^3}$ e $F(t) = \frac{s}{a^2 + s^2}$, para $s > 0$, a seguir, será visto como extrair a função $f(t)$ a partir destes resultados encontrados.

2.1 Solução de Problemas de Valores Iniciais

Nesta seção será utilizada a Transformada de Laplace na resolução de problemas que envolvem equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Para tanto, segue-se primeiramente os seguintes resultados.

Teorema 4. *Suponha que f é contínua e que f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso, $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.*

Corolário 5. *Suponha que as funções $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas e que f^n é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, \dots, |f^n(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $\mathcal{L}\{f^n(t)\}$ existe para $s > a$ e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{(n-1)}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Com esses resultados, é possível utilizar a Transformada de Laplace para resolver problemas de valores iniciais que envolvem equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

Para uma equação $ay'' + by' + cy = f(t)$, segundo o corolário anterior, sua transformada será:

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s)$$

onde $F(s)$ é a transformada de $f(t)$ e $Y(s)$ é a transformada da solução $y(t)$. Então, tem-se

$$Y(s) = \frac{(as + b)y(0) + ay'(0) + F(s)}{as^2 + bs + c}$$

de onde é possível extrair a solução $y(t)$ pelo processo de inversão da transformada de $Y(s)$, no qual a transformada inversa de $Y(s)$ é denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.

A maior vantagem de utilizar a Transformada de Laplace está em resolver uma equação algébrica para $Y(s)$ ao invés de uma equação diferencial para $y(t)$. No entanto, encontrar a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ pode ser complicado, por isso existem tabelas que compilam as funções mais utilizadas e suas respectivas transformadas, e que podem ser consultadas para resolver tais problemas.

Outro fator útil na resolução é que a transformada inversa também é um operador linear, ou seja, se $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$ então:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$

Esta propriedade será utilizada no exemplo a seguir para aplicar a expansão em frações parciais na transformada de algumas funções, a fim de facilitar o processo de inverter a transformada.

Exemplo 2. Use a Transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' - 2y' + 2y = \cos(t); \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

(a) De acordo com o Corolário 5, a transformada dessa equação pode ser escrita como

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 0$$

E então, substituindo os valores das condições iniciais, reorganizando os termos e aplicando a expansão em frações parciais, tem-se:

$$Y(s) = \frac{3+s}{s^2+3s+2} = \frac{3+s}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Resolvendo essa expansão, encontra-se que $A = 2$ e $B = -1$ e assim:

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Através da consulta à tabelas de transformadas, sabe-se que $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{at}$, $s > a$, e então conclui-se que a solução $y(t)$, que é a transformada inversa de $Y(s)$, é dada por:

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

(b) Consultando uma tabela, sabe-se que $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$, então pode-se escrever a transformada dessa equação como:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Novamente, utilizando os valores das condições iniciais, reorganizando os termos e aplicando frações parciais, tem-se:

$$Y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} = \frac{As+B}{s^2-2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Calculando os valores que satisfazem essa expansão, encontra-se que $A = \frac{4}{5}$, $B = -\frac{6}{5}$, $C = \frac{1}{5}$ e $D = -\frac{2}{5}$, e então substitui-se esses valores na equação para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{\frac{4}{5}s - \frac{6}{5}}{s^2-2s+2} + \frac{\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+1} = \frac{1}{5} \left(\frac{4s-4}{s^2-2s+2} - \frac{2}{s^2-2s+2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \right)$$

Em um tabela de transformadas, observa-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\} = \sin(at); \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\} = \cos(at); \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\} = e^{at}\sin(bt); \quad s > a$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\} = e^{at}\cos(bt) \quad s > a$$

E assim, partindo de $Y(s)$, é possível encontrar a solução $y(t)$, que será:

$$y(t) = \frac{1}{5}(4e^t\cos(t) - 2e^t\sin(t) + \cos(t) - 2\sin(t))$$

3 Aplicações

A Transformada de Laplace é apenas um dos vários métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias, há várias outras maneiras de resolvê-las, de acordo com os tipos em que podem ser classificadas e a forma como se apresentam, que varia conforme o problema no qual são aplicadas. Há várias situações do cotidiano nas quais essas equações possuem muita utilidade, como é o caso da construção civil. Nesta seção, são tratados dos problemas de deflexões de vigas e flambagem de colunas, ambos apontados em Hibbeler (2010)

3.1 Deflexão de vigas

Na área da engenharia civil, é muito importante conhecer os efeitos que um carregamento pode causar em um elemento da estrutura. No caso de uma viga, é possível visualizar previamente esses efeitos, chamados de deflexão, através do esboço da **linha elástica**, um eixo longitudinal que passa pelos centroides da área das seções transversais da viga.

Porém, para construir esse esboço, é necessário conhecer os tipos de apoios e suas respectivas restrições de movimento. Um apoio do primeiro gênero, conhecido como apoio móvel ou rolete, é aquele que restringe o movimento no sentido vertical, mas permite que a viga se movimente no sentido horizontal (sentido de seu comprimento) e que haja rotação, um exemplo são as pontes móveis, apenas apoiadas em pilares e que podem girar sobre eles. Um apoio do segundo gênero, chamado de apoio fixo ou rótula, gera restrição de movimento vertical e horizontal, mas permite rotação em torno do seu eixo, como é o caso de uma gangorra, por exemplo. Já um apoio de terceiro gênero, chamado de engaste, impede a movimentação no sentido vertical, horizontal e também a rotação, como é o caso de um poste ou um trampolim, por exemplo. A tendência de rotação é denominada momento fletor, este pode ser quantificado de acordo com o carregamento aplicado na estrutura e é o responsável por deformar a linha elástica.

A relação entre o momento fletor e a deflexão da viga é medida pelo raio da curvatura ρ da linha elástica, ou seja, pelo tanto que ela foi modificada em relação à sua posição reta original. Para calcular esse raio, utiliza-se um sistema cartesiano onde o eixo x é horizontal e a viga está posicionada longitudinalmente sobre esse eixo, já o eixo v é vertical e mede o deslocamento do centroide da área da seção transversal da viga.

Para analisar o caso de um carregamento perpendicular ao eixo horizontal de uma viga com apoios de primeiro e segundo gênero (extremidades direita e esquerda, respectivamente), observa-se uma seção transversal da mesma, conforme a figura 1:

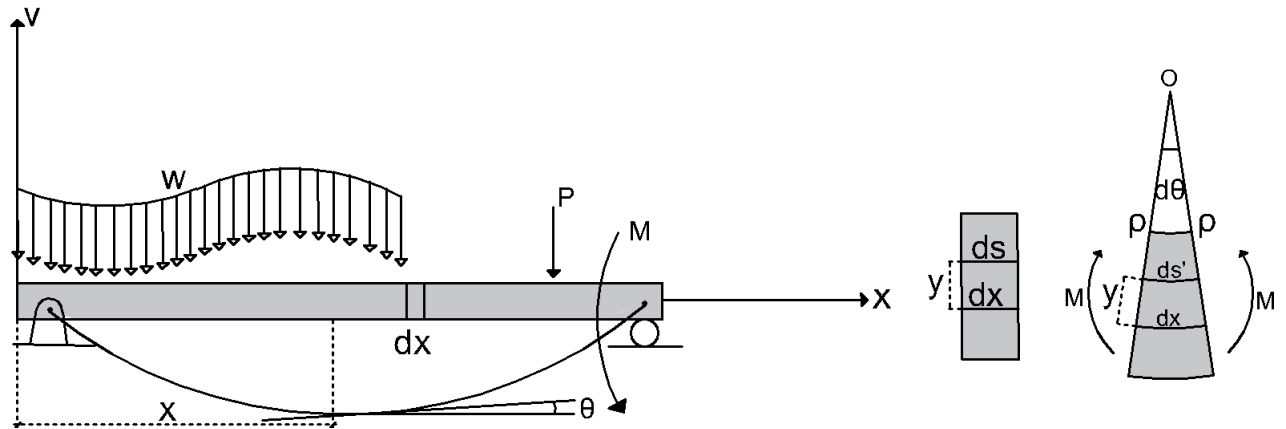


Figura 1: Deformação da viga

Quando a viga é deformada, o ângulo entre as seções transversais torna-se $d\theta$, o arco dx representa um segmento da linha elástica que coincide com o eixo neutro em cada seção transversal, portanto não é deformado, enquanto o arco ds , a uma distância y de dx , sofre deformação. O raio da curvatura ρ é medido do centro do círculo O até o arco dx . A deformação ϵ no arco ds é representada por:

$$\epsilon = \frac{ds' - ds}{ds}$$

Porém, analisando a imagem e utilizando a aproximação do seno de ângulos muito pequenos para o próprio valor do ângulo, é possível concluir que $ds' = (\rho - y)d\theta$ e $ds = dx = \rho d\theta$, assim tem-se:

$$\epsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \rightarrow \epsilon = \frac{-y}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{-\epsilon}{y} \quad (3)$$

Para uma viga de material homogêneo, pode-se aplicar a lei de Hooke: $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$, onde σ é a tensão normal e E o módulo de elasticidade do material. Além disso, também cabe aplicar a fórmula da flexão: $\sigma = \frac{-My}{I}$, onde M é o momento fletor interno no ponto onde ρ deve ser calculado, I é o momento de inércia em torno do eixo neutro. Combinando essas duas fórmulas com a equação (3), obtém-se a seguinte equação, onde $\frac{1}{\rho}$ representa a curvatura da linha elástica.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4)$$

Voltando ao plano cartesiano, nota-se que é possível representar a curvatura por uma função $v(x)$. Por meio de cálculos utilizando geometria diferencial, que não estão no escopo deste trabalho, prova-se que esta relação é dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

No entanto, na aplicação real, a deformação da linha elástica deve ser a menor possível, visto que grandes deformações podem causar a ruptura da estrutura, sendo assim, a variação

medida no eixo v em relação ao eixo x é muito pequena, de modo que $(dv/dx)^2$ é ainda menor e quase desprezível se comparado com a unidade, então, pode-se reescrever a equação anterior, já substituindo o resultado da equação (4) e tem-se:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (5)$$

É possível ainda representar essa equação de duas formas diferentes. Na maioria dos casos, o produto EI , denominado rigidez à flexão, é constante, então pode-se derivar cada lado da igualdade e, sabendo que $\frac{dM}{dx} = V(x)$, ou seja, a inclinação do diagrama de momento é igual a força de cisalhamento, obtém-se:

$$\frac{dM}{dx} = EI \left(\frac{d}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} \right) \rightarrow EI \frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \quad (6)$$

Sabendo ainda que $\frac{dV}{dx} = -w(x)$, ou seja, a inclinação do diagrama de força cortante é igual ao valor negativo da intensidade de cargas distribuída, pode-se derivar novamente cada lado da equação, o que resulta em:

$$EI \left(\frac{d}{dx} \frac{d^3v}{dx^3} \right) = \frac{dV}{dx} \rightarrow EI \frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \quad (7)$$

As fórmulas e conhecimentos relacionados à engenharia civil aqui utilizados podem ser melhor estudados em Hibbeler(2010). As equações (5), (6) e (7) são equações diferenciais de segunda, terceira e quarta ordem, respectivamente. Para encontrar uma função $v(x)$ que represente a deflexão da viga, pode-se utilizar a Transformada de Laplace para resolver a equação (7).

Considerando uma viga horizontal de comprimento L e sob um carregamento w_0 , que está apoiada em suas duas extremidades em vínculos de terceiro gênero, então tem-se que $v(0) = 0$, $v(L) = 0$, pois não há deflexão nas extremidades, assim como $v'(0) = 0$ e $v'(L) = 0$, pois a linha elástica é horizontal nestes pontos, já que o tipo de apoio garante a restrição da rotação.

A Transformada de Laplace para a equação (7) é:

$$EI[s^4V(s) - s^3v(0) - s^2v'(0) - sv''(0) - v'''(0)] = -\frac{w_0}{s}$$

Substituindo os valores das condições iniciais e supondo que $v''(0) = c_1$ e $v'''(0) = c_2$:

$$s^4V(s) - sc_1 - c_2 = -\frac{w_0}{sEI} \rightarrow V(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} - \frac{w_0}{EI s^5}$$

Consultando uma tabela de transformadas inversas, sabe-se que $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n!}{s^{n+1}} \right] = t^n$. Então escreve-se:

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{c_1}{2!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2!}{s^3} \right] + \frac{c_2}{3!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3!}{s^4} \right] - \frac{w_0}{EI 4!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4!}{s^5} \right] \\ v(x) &= \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{6} - \frac{w_0 x^4}{24EI} \\ v'(x) &= c_1 x + \frac{c_2 x^2}{2} - \frac{w_0 x^3}{6EI} \end{aligned}$$

Novamente aplicando as condições iniciais, tem-se que:

$$v(L) = 0 = \frac{c_1 L^2}{2} + \frac{c_2 L^3}{6} - \frac{w_0 L^4}{24EI}$$

$$v'(L) = 0 = c_1 L + \frac{c_2 L^2}{2} - \frac{w_0 L^3}{6EI}$$

Resolvendo este sistema, encontra-se $c_1 = -\frac{w_0 L^2}{12EI}$ e $c_2 = \frac{w_0 L}{2EI}$ e então a função da deflexão procurada é:

$$v(x) = -\frac{w_0 L^2}{24EI} x^2 + \frac{w_0 L}{12EI} x^3 - \frac{w_0}{24EI} x^4$$

3.2 Flambagem de Colunas

Outro tipo de componente estrutural importante são as colunas, estas são elementos compridos verticais que sofrem a ação de forças axiais de compressão, ou seja, carregamentos que atuam no sentido de seu comprimento e que, se ultrapassarem a **carga crítica** P_{cr} , podem vir a causar deformações laterais, conhecidas como flambagem.

Para quantificar essa deformação, procura-se novamente uma equação que modele a deflexão do elemento estrutural, da qual também se pode concluir sobre a carga crítica suportada. Neste estudo, considera-se uma coluna ideal, ou seja, inicialmente reta, feita de material homogêneo e que se comporta de maneira linear elástica, com a carga aplicada no centroide da seção transversal e a deformação ocorrendo em um único plano. Conforme mostra a figura 2:

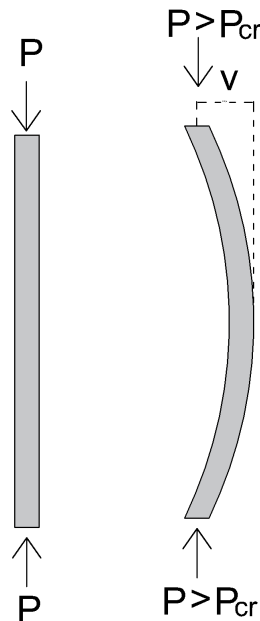


Figura 2: Deformação da coluna

Como o efeito analisado é o mesmo (deflexão), pode-se utilizar novamente a equação que

relaciona o momento interno com a deflexão do elemento, ou seja:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M \quad (8)$$

O momento, nesse caso, é calculado pela multiplicação da carga axial P com a deformação v (perpendicular à carga), em função do sentido de giro que o momento tende a gerar e seguindo a convenção de sinais usualmente utilizada na engenharia civil para a determinação do momento, o resultado é:

$$M = -Pv$$

Substituindo esse valor na equação (8), tem-se:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{-Pv}{EI} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0 \quad \rightarrow \quad v'' + \frac{P}{EI}v = 0 \quad (9)$$

Esta é uma equação diferencial de segundo grau e de segunda ordem, é homogênea e possui coeficientes constantes, podendo ser resolvida para encontrar a equação da deflexão v . A equação característica associada à equação (9) é: $r^2 + \frac{P}{EI} = 0$ e suas raízes são $r = \pm \sqrt{\frac{-P}{EI}}$, ou seja, são raízes complexas conjugadas, de modo que a solução será:

$$v = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right)$$

Olhando para as extremidades da coluna ($x = 0$ e $x = L$), sabe-se que a deformação é nula nesses pontos, então:

$$0 = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot 0 \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot 0 \right) \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

E

$$0 = c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)$$

A segunda condição inicial só pode ser satisfeita se $c_2 = 0$, o que fornece a solução trivial, ou seja, $v = 0$ para todo x , o que significaria que não há flambagem, independentemente das condições de carga da coluna, então a segunda maneira de satisfazer essa condição é se $\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) = 0$, o que ocorre sempre que $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = n\pi$.

Então a equação que modela a flambagem de uma coluna é:

$$v = c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)$$

onde $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = n\pi$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Como também há interesse em descobrir a carga crítica que a coluna poder aguentar, ela pode ser definida como:

$$\frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \rightarrow \quad P = \frac{EI n^2 \pi^2}{L^2}$$

E seu menor valor ocorre quando $n = 1$ e então $P_{cr} = \frac{EI \pi^2}{L^2}$. Essa ficou conhecida como *carga de Euler*, pois foi Leonhard Euler quem primeiro a determinou em 1757.

Referências

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010. 604 p. Tradução e Revisão Técnica: Valéria de Magalhães Iório.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 637 p. Tradução: Arlete Simille Marques, revisão técnica: Sebastião Simões da Cunha Jr.

Uma prova clássica para o Teorema Fundamental da Álgebra à luz da Análise Complexa

Mariana da Rosa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
marianabernartt@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pcconejo33@gmail.com

Resumo: Este trabalho é dedicado a uma breve apresentação de resultados acerca de funções complexas, visando demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra à luz do Teorema de Liouville.

Palavras-chave: Funções Inteiras; Teorema de Liouville; Teorema Fundamental da Álgebra.

1 Introdução

A história do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) começa com Girard e Descartes que, segundo Roque (2012) foram os primeiros a tratar da questão da existência de raízes de uma equação qualquer, na primeira metade do século XVII.

Em 1629, Girard acaba por afirmar que todas as equações possuem tantas soluções quanto o termo de maior grau do polinômio, porém, não apresentou uma demonstração desse fato, (OLIVEIRA, 2011). Essa afirmação é o início do desenvolvimento do resultado que veio a ser conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra.

O TFA afirma que dado um polinômio não constante

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \quad (1)$$

com coeficientes complexos e $1 \leq n$ inteiro, $P(z)$ possui no máximo n raízes complexas.

Entretanto, foi necessário mais de um século para se ter uma primeira tentativa de comprovar a legitimidade do TFA, que conforme Oliveira (2016) ocorrera apenas em 1746 por D' Alembert. Entretanto a prova apresentava erros que foram corrigidos apenas em 1851. A partir disso ocorreram muitas tentativas de demonstração do TFA, chegando ao ponto de ser postulada como axioma, por A.G. Kästner, segundo OLIVEIRA (2011). Não obstante ao esforço de vários matemáticos, Gauss em 1799 apresenta a primeira prova considerada correta, baseada em ângulos e em propriedades geométricas de curvas algébricas, como trata DOMINGUES (2003). Já a prova de Liouville surge entre 1809-1882. Sua demonstração é realizada por contradição, fazendo uso da teoria de Análise Complexa.

Esse trabalho propõe-se a provar o TFA utilizando o Teorema de Liouville. Realizando uma breve apresentação de definições e resultados de funções complexas. Na Seção 2 realizamos uma breve revisão acerca da analiticidade e convergência de funções e série de funções respectivamente. Na Seção 3 tratamos de alguns caminhos, com objetivo de mostrar que a analiticidade de uma função é equivalente a esta função possuir uma série de potências convergente. Com os elementos tratados nas seções 2 e 3, provamos na Seção 4 a Estimativa de Cauchy, e consequentemente o Teorema de Liouville, que é o foco dessa seção. Por fim na Seção 6 provamos o TFA utilizando Liouville e realizamos algumas breves considerações acerca da sua extensão natural.

O trabalho tem como bibliografia básica o Livro de CONWAY (1986).

2 Pré-requisitos

Iremos abordar de forma breve, mas completa, alguns elementos de funções de uma variável complexa. Em especial definiremos o que significa uma função ser analítica no conjunto dos números complexos, seguido pelo clássico Teorema de Cauchy-Riemann, e como consequência mostraremos um resultado acerca da imagem de funções diferenciáveis em um domínio conexo no espaço em questão. Ainda, trataremos da convergência uniforme de sequências e séries de funções, para que assim possamos demonstrar o Teste de M.Weierstrass. Este estabelece condições para que uma série de funções seja uniformemente contínua.

Para adentrarmos nos resultados que são do interesse desse trabalho, em especial Liouville, comecemos definindo um dos limites mais estudado e tratado no Cálculo Diferencial, a derivada.

Definição 1. Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ com G um conjunto aberto de $\mathbb{C}$. Dizemos que a função f é *diferenciável em* $a \in G$ quando

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe.

A expressão (2) é chamada de derivada de f no ponto a .

O interesse do cálculo de funções de uma variável complexa está na *analiticidade*. Na Análise Real não é suficiente que uma função seja de classe C^∞ para que seja analítica. Ao passo que na Análise Complexa basta que a função seja de classe C^1 , isto é, que a função derivada seja contínua.

Definição 2. Seja G um aberto de $\mathbb{C}$. A função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é dita *Analítica* quando f é diferenciável em G e a função $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Na Seção 3 mostraremos que a definição de analiticidade no plano complexo, como na reta real, é equivalente a função possuir uma representação em série de potências convergente como veremos no Teorema 15.

Nem sempre é fácil de calcular a derivada de uma função, mais difícil ainda é saber se uma função é analítica. Mas o Teorema que enunciamos a seguir torna esta tarefa mais prática, já que estabelece condições sobre as funções u e v de valores reais, para que a função f complexa seja analítica.

Teorema 3. *Sejam u e v funções de valores reais com derivadas parciais contínuas. Então $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com $z = x + iy$ é analítica se, e somente se, u e v satisfazem as Equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad (3)$$

Neste caso

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad (4)$$

O Teorema 3 é comumente apresentado e demonstrado em um curso de Análise Complexa ou Variáveis Complexas, podendo ser encontrado sua demonstração em qualquer livro base desse curso, portanto omitiremos a sua prova.

Sabemos que a função exponencial real é claramente diferenciável em toda reta real e além disso que ela é analítica. Com o Teorema 3 se verifica sem dificuldades que o mesmo ocorre para a função exponencial complexa.

Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Vamos mostrar que f satisfaz (3) para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Com efeito, note que a parte real da função f é determinada pela função $u(x, y) = e^x \cos y$ e a parte imaginária $v(x, y) = e^x \sin y$, de modo que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Disso

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como as derivadas parciais de primeira ordem das funções u e v são contínuas, pois são o produto de funções contínuas, decorre do Teorema 3 que a função f é analítica em $\mathbb{C}$.

Além de demonstrar que a função exponencial é analítica, as Condições de Cauchy-Riemann permitem provar a Proposição 4 de forma direta.

Dado que uma função é diferenciável em um domínio G conexo pode-se afirmar se a função é, ou não constante, sabendo o valor da derivada em todos os pontos de G .

Proposição 4. *Seja G um conjunto aberto e conexo. Se a função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável com $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$ então a função f é constante.*

Prova. Com efeito, suponha que $f = u + iv$ é diferenciável em uma região G com $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$. Da expressão obtida no Teorema 3 para $f'(z)$, vide (4), tem-se que a derivada da função f em qualquer ponto $z \in G$ é expressa por

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0,$$

consequentemente $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$.

Ainda, das Equações de Cauchy-Riemann dadas em (3),

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Logo as derivadas parciais de u e v são nulas, e como essas funções estão definidas num conexo, segue do cálculo para funções de duas variáveis que u e v são funções constantes, portanto f é constante. $\square$

Esse resultado consiste em uma peça importante na demonstração do Teorema de Liouville. A saber que, se existe um ponto do domínio de uma função diferenciável, tal que a derivada não se anula, então essa função não pode ser constante.

Necessitamos também do conceito de *limite no infinito* de uma função para demonstrar o Teorema de Liouville.

Definição 5. Dizemos $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, quando, $\forall M > 0$ existe $R > 0$ tal que $|f(z)| > M$ sempre que $|z| > R$.

A seguir definiremos o que significa uma sequência de funções de uma variável complexa ser uniformemente convergente.

Definição 6. Seja X um conjunto qualquer e $\Omega \subset \mathbb{C}$, suponha que $f_1, \dots, f_n, \dots$ são funções de X em Ω . Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para a função f quando para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad (5)$$

sempre que $n \geq N$, com N independente de ϵ .

Observemos que na Definição 6, N não depender de ϵ significa que para qualquer $\epsilon > 0$ dado o N que faz (5) ocorrer é fixo.

Seja $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$. Defina $f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$. Dizemos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é convergente quando $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in X$. utilizaremos a notação $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) < \infty$ quando f for convergente.

Além disso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uniformemente convergente para f quando

$$|f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)| < \epsilon \quad (6)$$

para todo $x \in X$, sempre que $n \leq N$.

O Teste de M. Weierstrass fornece algumas condições para que uma série seja uniformemente convergente.

Teorema 7. (Teste de M. Weierstrass). Tome $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Suponha que a constante satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uniformemente convergente.

Prova. Tome $f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$. Então para todo $n > m$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |u_{m+1}(x) + \dots + u_n(x)| \leq |u_{m+1}(x)| + \dots + |u_n(x)|. \quad (7)$$

Como $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$, segue na Equação (7) que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k \quad (8)$$

para todo $x \in X$.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ é convergente por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq N$ então $\sum_{k=m+1}^{\infty} M_k \leq \epsilon$. Logo na Equação (8) tem-se que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k < \epsilon \quad (9)$$

para $m \geq N$.

Assim a sequência $(f_n(x))$ é de Cauchy e portanto f_n é convergente. Logo existe um número $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi = \lim f_n(x)$. Defina $f(x) = \xi$. Agora

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad (10)$$

e como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ é convergente por hipótese, segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal que $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$ sempre que $n \geq N$.

Assim na Equação (10), $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$, sempre $n \geq N$.

Portanto da definição de uniformemente convergente, dada em (6), segue que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uniformemente convergente. $\square$

Finalizamos aqui a revisão de conceitos de cálculo. A maior parte das definições e resultados acerca da analiticidade e convergência uniforme de série de funções abordados nesta seção, são utilizadas na Seção 3 para que possamos mostrar uma equivalência da analiticidade.

3 Da analiticidade à série de potências

Nessa seção mostraremos que toda função analítica em $B(0; R)$ pode ser representada como uma série de potências com raio de convergência maior ou igual a R . Além disso, provaremos que se uma função analítica é limitada em uma bola então a derivada de qualquer ordem é limitada, esse resultado é conhecido como *Estimativa de Cauchy* e será utilizado na demonstração do *Teorema de Liouville*, apresentada na Seção 4.

Antes de realizarmos o objetivo desta seção, é necessário definir o que significa um caminho ser retificável. Para isto precisamos passar pelo conceito de variação limitada e de suavidade de um caminho, estabelecendo ainda, que os caminhos suaves também são de variação finita, e determinando uma expressão que permite calcular o comprimento de arco da imagem do caminho, que neste caso é exatamente a variação total como veremos na Proposição 10.

Definição 8. Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ com $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é dito de *variação limitada* quando existe $M > 0$ tal que para qualquer partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ de $[a, b]$,

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

A *variação total* de γ é definida por $V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; P) : \text{com } P \text{ uma partição de } [a, b]\}$.

Na definição anterior podemos observar que se o caminho é de variação limitada, então ele tem variação finita, pois das propriedades de $\sup$ e $\inf$ temos que $\sup\{v(\gamma; P) : P\} \leq \inf\{M\} = M$, disso decorre que $V(\gamma) \leq M < \infty$.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho contínuo então o conjunto $\{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ é chamado de *traço* de γ . Utilizamos a notação: $\{\gamma\}$ quando estivermos nos referindo ao traço.

Definição 9. O caminho γ é dito *suave* quando $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua para todo $t \in [a, b]$. Um caminho é *suave por partes* quando é suave, a menos de um número finito de pontos.

Utilizaremos constantemente os caminhos suaves neste trabalho, visto que há importantes resultados que são baseados na condição de suavidade, como a Proposição 10 a qual fornece uma fórmula para obter a variação total, antes disso, a proposição garante que todo caminho suave por partes é de variação limitada.

Proposição 10. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho suave por partes então γ é de variação limitada e a variação total pode ser obtida por

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (11)$$

Além de garantir que os caminhos suaves são de variação limitada, a Proposição 10 mostra que o comprimento do traço de qualquer caminho suave por partes é finito. Com o comprimento podendo ser obtido utilizando (11).

Em especial qualquer caminho que seja de variação limitada é um caminho retificável.

Definição 11. Dizemos que γ é um *caminho retificável* quando o caminho é de variação limitada.

Assim da Proposição 10 qualquer caminho suave é um caminho retificável.

Tome $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho retificável e $a \leq t \leq b$. Definimos $|\gamma|(t)$ como a $V(\gamma; [a, t])$, isto é

$$|\gamma|(t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\right\}. \quad (12)$$

tal que $\{a = t_0, \dots, t_n = t\}$ é uma partição de $[a, t]$.

Observação 1. Note que $|\gamma|$ é crescente pois, se $t_1 \leq t_2$ para $a \leq t_k \leq b$, com $k = 1, 2$, então $v(\gamma; [a, t_1]) \leq v(\gamma; [a, t_1]) + v(\gamma; [t_1, t_2]) = v(\gamma; [a, t_2])$. Logo $|\gamma|(t_1) \leq |\gamma|(t_2)$.

O primeiro resultado é semelhante ao caso real, e muito útil na demonstração da Estimativa de Cauchy.

Proposição 12. *Seja γ uma curva retificável e suponha que f é uma função contínua em $\{\gamma\}$. Então $|\int_{\gamma} f| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq V(\gamma) \sup\{|f(z)| : z \in \{\gamma\}\}$.*

Adentremos agora nas representações de funções analíticas acerca de um caminho retificável. Começando pela *Fórmula integral de Cauchy* a qual estabelece que o valor de uma função f em um ponto z , pode ser calculado em função de uma integral ao longo de um caminho retificável. A saber que $\gamma(t) = a + re^{it}$ determina uma circunferência de centro a e raio r .

Proposição 13. *Tome $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, e suponha que $\overline{B}(a; r) \subset G$, se $\gamma(t) = a + re^{it}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

para $|z - a| < r$.

Prova. Uma prova pode ser encontrada em CONWAY(1986, p.70). □

Nos próximos resultados, em especial no Teorema 15, o caminho γ utilizado na Proposição 13 será de grande valia, dada as propriedades de sua imagem.

Sabemos que a integral é um tipo especial de limite, de modo que o Lema 14 garante que em alguns casos a ordem do limite repetido pode ser invertida, ou seja, os limites comutam.

Lema 14. *Seja γ uma curva retificável em $\mathbb{C}$ e suponha que f_n e f são funções contínuas em $\{\gamma\}$. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente para f então*

$$\int_{\gamma} f = \lim \int_{\gamma} f_n.$$

Prova. Note que $V(\gamma)$ e $(b - a)$ são positivos consequentemente $\frac{\epsilon}{V(\gamma)(b-a)} > 0$ é arbitrário para $\epsilon > 0$ arbitrário, então da hipótese de convergência uniforme, Definição 6, existe um inteiro N tal que

$$|f_n(w) - f(w)| < \frac{\epsilon}{V(\gamma)(b-a)} \quad (13)$$

para todo w em $\{\gamma\}$ e $n \geq N$.

Tomando $n \geq N$ e utilizando (5) segue que

$$|\int_{\gamma} f - \int_{\gamma} f_n| = |\int_{\gamma} (f - f_n)|$$

Utilizado a Proposição 12 e mudando a notação decorre que

$$|\int_{\gamma} f - \int_{\gamma} f_n| = |\int_{\gamma} (f - f_n)| \leq \int_{\gamma} |f(w) - f_n(w)| |dw|. \quad (14)$$

Assim, da definição dada em (26), com $d|\gamma|(t) = V(\gamma; [a, t])$, e como V é uma função crescente pela Observação 1, segue que $V(\gamma; [a, t]) \leq V(\gamma)$, logo

$$\int_{\gamma} |f(w) - f_n(w)| |dw| < \int_{\gamma} \frac{\epsilon}{V(\gamma)(b-a)} |dw| \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\epsilon}{V(\gamma)(b-a)} \int_a^b d|\gamma|(t) \\ &\leq \frac{\epsilon}{V(\gamma)(b-a)} \int_a^b V(\gamma) = \epsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Portanto de (14), (15) e (16) tem-se que $|\int_{\gamma} f - \int_{\gamma} f_n| < \epsilon$ sempre que $n \geq N$. $\square$

Provaremos agora a equivalência entre uma função ser analítica e possuir uma representação em série de potências convergente.

Teorema 15. *Seja f analítica na $B(a; R)$, então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \text{ para } |z-a| < R,$$

com $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, e raio de convergência $\geq R$.

Prova. Tome $0 < r < R$ de forma que $\overline{B}(a; r) \subset B(a; R)$. Se $\gamma(t) = a + re^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$, então pela Proposição 13,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ sempre que } |z-a| < r. \quad (17)$$

Como $|z-a| < r$ e w pertence a circunferência determinada pelo traço de γ , segue que

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq \max\{|f(w)| : |w-a| = r\} = M \implies \\ \frac{|f(w)||z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} &\leq \frac{M|z-a|^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r} \frac{|z-a|^n}{r^n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Agora, desde que $|z-a| < r$ então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} \frac{|z-a|^n}{r^n} < \infty, \quad (19)$$

pois é uma série geométrica de razão menor que um.

Da limitação dada em (18) e da convergência dada em (19), pode-se utilizar o Teste de M . *Weierstrass* (ver Teorema 7) o qual garante que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

é uniformemente convergente para $\frac{f(w)}{w-z}$, para todo $w \in \{\gamma\}$. Segue que

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (20)$$

Das Equações (17) e (20) decorre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw. \quad (21)$$

Do Lema 14, a integral e a série da Equação (21) podem ser comutados, obtendo que

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw. \quad (22)$$

Note que a série obtida em (22) é uma série de potências convergente, válida para $|z-a| < r$. Defina

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad (23)$$

com a_n independente de z .

Por outro lado os coeficientes a_n são expressos por $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, com o valor de a_n independente de γ e de r . Logo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ para } |z-a| < r. \quad (24)$$

Como a escolha de r é arbitrária, segue que a conclusão (24) vale para $|z-a| < R$. Resultando que o raio de convergência de (24) deve ser pelo menos R . $\square$

Encerramos essa seção tendo discutido duas representações locais para funções analíticas. A primeira denominada de Fórmula integral de Cauchy, Proposição 13, a qual estabelece uma representação para a função por meio de uma integral acerca de uma circunferência. Já a segunda representação, consiste em escrever uma função analítica por meio de uma série de potências que pode ser obtida utilizando as derivadas enésimas da função.

Na próxima seção mostraremos um resultado análogo a Fórmula Integral de Cauchy para derivadas, também estendemos o Teorema 15 para o caso global, permitindo provar a Estimativa de Cauchy, para que assim possamos demonstrar o Teorema de Liouville.

4 Teorema de Liouville

Mais geral do que as funções analíticas são as *funções inteiras*. Essas funções tem a propriedade de serem analíticas em todo plano complexo. Sendo a exponencial complexa um exemplo de função inteira, vide Exemplo 1.

Uma das consequências imediatas de uma função ser inteira, é que ela pode ser representada por uma série de potências de raio infinito. De fato do Teorema 15 e da condição da função ser inteira, podemos tomar bolas de raio R tão grande quanto se queira de modo a cobrir o plano complexo.

A *Fórmula integral de Cauchy para derivadas* é uma proposição que fornece uma fórmula para a derivada enésima a partir de uma integral para caminhos. Este resultado decorre do Teorema 15.

Corolário 16. Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica e $\overline{B}(0; R) \subset G$, então

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad (25)$$

com $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Prova. Do Teorema 15 temos que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, por outro lado segue da Equação (23) do Teorema 15 que $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$. Logo $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$. $\square$

Nem sempre é fácil de calcular a integral dada em (25). Muitas vezes para questões práticas, uma aproximação para a derivada é suficiente e até mais barata computacionalmente. Assim a Estimativa de Cauchy fornece um limitante para a derivada de grau n de funções limitadas, utilizando o próprio limitante da função para isto.

Teorema 17. (Estimativa de Cauchy). Tome f uma função analítica em $B(a; R)$ e suponha que $|f(z)| \leq M$ para $z \in B(a; R)$. Então $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$.

Prova. Como f é uma função analítica na $B(a; r)$ com $r < R$ segue do Corolário 16 e da Proposição 12 que

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} V(\gamma) \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{|(w-a)^{n+1}|} : w \in \{\gamma\} \right\}. \quad (26)$$

Como γ é suave podemos utilizar o Teorema 10, obtendo em (26) que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} V(\gamma) \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{|(w-a)^{n+1}|} : w \in \{\gamma\} \right\} = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{|(w-a)^{n+1}|} : w \in \{\gamma\} \right\}.$$

Da hipótese de limitação da f e como $|w-a| = r$, pois $w \in \gamma$ ou seja w pertence a circunferência de centro a e raio r , segue que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n}. \quad (27)$$

Como em (27) pode-se tomar r tão próximo de R quanto se queira o teorema está provado. $\square$

Vimos que a Estimativa de Cauchy permite afirmar que se uma função é limitada e analítica, então a derivada de qualquer ordem será limitada. Com este resultado posto podemos demonstrar o Teorema de Liouville. Para isto a Proposição 4 será de suma importância pois mostraremos que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 18. (Liouville). Se f é uma função inteira e limitada então é constante.

Prova. Suponha que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Utilizaremos a Proposição 4 para mostrar que sobre essas condições, a função é constante, assim, mostramos que $f'(z) = 0$ para todo z . Com efeito, tome $B(w; R)$ com w e R arbitrários, pela Estimativa de Cauchy (Teorema 17)

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R},$$

para todo $z \in B(w; R)$. Da arbitrariedade de R obtemos que $|f'(z)| = 0$ para todo z , ou seja, $\forall z \in \mathbb{C}$ temos $f'(z) = 0$, e como $\mathbb{C}$ é conexo segue da Proposição 4 que f é constante. $\square$

Logo qualquer função que seja limitada, dado que é inteira, é uma função constante, ou reciprocamente toda função inteira e não constante é ilimitada.

5 De Liouville ao Fundamental da Álgebra

Utilizando o principal resultado da Seção 4, o Teorema de Liouville, realizaremos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra à luz deste resultado. Essa prova do TFA é direta e utiliza resultados clássicos de topologia, como o Teorema de Heine-Borel.

Teorema 19. (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se $P(z)$ é um polinômio não constante, então existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a) = 0$.*

Prova. Suponha por contradição que $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \neq 0$ para todo z . Disso podemos definir $f(z) = \frac{1}{P(z)}$, e como toda função polinomial é uma função inteira então f é inteira.

Ainda, como $P(z)$ é não constante, segue

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| = \infty, \quad (28)$$

consequentemente $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Em particular tomando $M = 1$ na Definição 5, existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$ então $|f(z)| < 1$.

Como a função f é inteira então f é contínua. Em especial f é contínua em $\overline{B}(a; R)$ com $a \in \mathbb{C}$ e R arbitrário, e mais, $\overline{B}(a; R)$ é um conjunto compacto, pois é fechado e limitado, Teorema de Heine-Borel. Disso e da continuidade da função f temos que $f(\overline{B}(a; R))$ é um conjunto compacto, a saber que imagem de compacto é compacto por função contínua.

Assim do Teorema de Heine-Borel f é limitada no $\overline{B}(a; R)$, logo existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| \leq c$. Segue da arbitrariedade de R que a função f é limitada.

Logo pelo Teorema 18, Teorema de Liouville, a função f é constante, portanto $P(z)$ é constante, o que contradiz o assumido. $\square$

Na Introdução trouxemos a afirmação realizada por Girald por volta de 1629 que toda equação polinomial possui tantas soluções quanto o termo de maior grau do polinômio. Observemos que o Teorema 19 diz que um polinômio com coeficientes complexos sempre possui uma raiz complexa, ou equivalentemente, dado uma equação polinomial com coeficientes complexos, esta equação possui uma solução complexa.

Mas se um polinômio $P(z)$ de grau n com coeficientes complexos possui uma raiz, este polinômio possui outras $(n - 1)$ raízes. Basta observar que se a_1 é raiz de $P(z)$ então $P(z) = Q_1(z)(z - a_1)$ com $Q_1(z)$ tendo grau $(n - 1)$. Segue do Teorema 19 que $Q_1(z)$ possui uma raiz complexa que denotaremos por a_2 . Logo

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)Q_2$$

com o grau de Q_2 igual a $(n - 2)$. Assim utilizando o Teorema 19 recursivamente obtemos que

$$P(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n), \quad (29)$$

com $c \in \mathbb{C}$ constante.

Logo se $P(z)$ é um polinômio não constante sobre $\mathbb{C}$, então $P(z)$ possui n raízes complexas, podendo ter uma, ou até n raízes iguais. Já que em (29), a_k pode ter multiplicidade de 1 até n para $k = 1, 2, \dots, n$.

6 Considerações

A prova apresentada para o Teorema Fundamental da Álgebra foi realizada por Liouville historicamente entre 1809 – 1882, ou seja, cerca de 200 anos após o Giraldu enunciar a primeira formulação do que viria a se tornar conhecida como Teorema Fundamental da Álgebra. Outras demonstrações do TFA utilizando a teoria de Galois, Análise real, ou uma parte da demonstração dada por Gauss, podem ser encontradas em Fine e Ronsenberger (1997).

Em suma, vimos neste trabalho que qualquer polinômio $P(z)$ de grau n sobre $\mathbb{C}$ possui no máximo n raízes no plano complexo. Quando as raízes possuem multiplicidade igual a um, então $P(z)$ tem exatamente n raízes sobre $\mathbb{C}$, ou equivalentemente, a equação polinomial $P(z) = 0$ possui n soluções complexas.

Mas é importante mencionar que o mesmo não ocorre para polinômios sobre $\mathbb{R}$. Por exemplo, o polinômio $H(x) = x^2 + 1$ não possui nenhuma raiz real, mas se este polinômio for considerado sobre $\mathbb{C}$, então ele possuirá duas raízes i e $-i$. Assim em uma abordagem mais algébrica, o Teorema Fundamental da Álgebra pode ser enunciado dizendo que o corpo dos números complexos é algebricamente fechado, pois todo polinômio possui uma e portanto todas as raízes em $\mathbb{C}$.

Referências

- CONWAY, J. B. **Functions of the One Complex Variable**, Springer-Verlag, 1986.
- DOMINGUES, H. H.; Iezzi, G. – **Álgebra Moderna** – 4ª Edição Reformulada - São Paulo: Atual, 2003.
- FINE, Benjamin; ROSENBERGER, Gerhard. **The fundamental theorem of algebra**. Springer, 1997. ISBN 0387946578.
- OLIVEIRA, O. R. B. de. **Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)**. 2011. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf>. Acesso em março de 2019.
- ROQUE, T. **História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

A Representação de Weierstrass: uma solução para o problema de Lagrange

Mariana da Rosa¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
marianabernartt@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: O presente trabalho é dedicado a uma introdução à teoria das Superfícies Mínimas. Apresentamos conceitos de Geometria diferencial e uma visão das Superfícies Mínimas à luz da Representação de Weierstrass, representação esta, que possibilita obter Superfícies Mínimas contidas em $\mathbb{R}^3$ que tem como domínio um conjunto Ω simplesmente conexo.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Superfície Mínima; Representação de Weierstrass.

1 Introdução

Segundo Carmo (2004), a palavra mínima está relacionada com o problema proposto em 1760 por Lagrange de encontrar superfícies de contorno pré-fixado e de área mínima. Como consequência da procura por exemplos de superfícies com essa propriedade, Lagrange estabeleceu a equação que satisfaz aos gráficos mínimos de uma função $f(x, y)$, dada por

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (1)$$

que é uma Equação Linear Elíptica de segunda ordem.

Em 1776, impondo restrições à Equação (1) Meusnier mostrou que o Catenóide e o Helicóide são Superfícies Mínimas. Não obstante ao esforço de vários matemáticos em encontrar uma solução geral para Equação (1), Weierstrass em 1866 obteve uma solução completamente satisfatória para esse problema, denominada de Representação de Weierstrass. Tal resultado evoca a teoria de funções holomorfas.

Dentre as Superfícies Mínimas descobertas pelos matemáticos até 1982, apenas o Plano e o Catenóide possuíam certa propriedade inerente à teoria das Superfícies Mínimas. Muitos tentaram provar que um terceiro exemplo com tal propriedade não existia. No entanto, de acordo com Carmo (2004), em 1982, Celso José da Costa obteve as equações do terceiro exemplo tão procurado, em sua tese de doutorado pelo IMPA, com auxílio da Representação de Weierstrass. Somente em 1984 foi possível observar a Superfície Costa com auxílio da computação gráfica.

¹Este trabalho não seria possível sem o apoio financeiro da Fundação Araucária

Esta visualização permitiu ver que a superfície Costa possuía 3 fins planares, dois deles do tipo Catenóide e o terceiro aproximando-se assintoticamente de um Plano.

Introduzimos nesse trabalho a Representação de Weierstrass como a solução para a Equação de Lagrange. Realizando essa apresentação em quatro seções.

Na Seção 2 trazemos algumas definições e resultados de Geometria diferencial que é tratado na bibliografia de Carmo (2004). Também tratamos das funções holomorfas e meromorfas, presentes no cálculo de funções de uma variável complexa, utilizando como base o livro de ZILL e SHANAHAN (2009).

Já na Seção 3, estabelecemos relações entre Superfícies Isotérmicas e Superfícies Mínimas, além disso, mostramos que o Catenóide é uma Superfície Mínima. Para essa seção utilizamos como bibliografia o livro de Carmo (2014).

Na Seção 4 expomos a Representação de Weierstrass e mostramos a conexão desse Teorema com os resultados anteriores a essa seção. Por fim, como aplicação da Representação de Weierstrass, mostramos na Seção 5 que o Helicóide e a Superfície de Enneper são Superfícies Mínimas. Para o desenvolvimento dessas seções foram consultados os trabalhos de Pereira (2013), Silva (2007) e o trabalho de Carmo (2004) que é um ótimo auxílio para compreender a Representação de Weierstrass.

2 Conceitos preliminares

Primeiramente realizamos uma breve apresentação de Superfícies Mínimas, do ponto de vista da Geometria diferencial, assunto o qual é tratado constantemente ao decorrer do trabalho. Por segundo, apresentamos uma revisão de funções holomorfas e meromorfas, trazendo algumas definições e demonstrando alguns resultados que utilizamos na Seção 4.

2.1 Superfícies Mínimas

Nesta subseção trazemos alguns elementos indispensáveis para o estudo de Superfícies Mínimas e mostramos o que é uma Superfície Mínima do ponto de vista da Geometria Diferencial. Os objetos aqui apresentados são elementos básicos, podendo ser encontrada as demonstrações e uma apresentação mais detalhada desses conceitos nos trabalhos de CARMO (2014); e ROSA e CONEJO (2018).

O estudo da Geometria Diferencial é dedicado a uma classe de superfícies denominadas de regulares. Intuitivamente, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida tomando pedaços de um plano deformando-os e juntando-os entre si formando assim uma estrutura lisa, na qual exista um plano tangente em cada um dos seus pontos. Motivando a definição seguinte.

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* quando para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ do ponto p e uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto V \cap S$, com U e $V \cap S$ abertos, e a parametrização X satisfazendo que

- i. X é diferenciável;
- ii. X é um homeomorfismo;
- iii. $\forall p \in U$, dX_p é injetiva.

A Definição 1 é baseada essencialmente na diferenciabilidade da parametrização X . Sabendo que uma superfície é regular, podemos tratar de propriedades que estão intrinsecamente associados a essa superfície. Conforme é estabelecido pela Primeira Forma Fundamental.

Definição 2. A forma quadrática I_p denominada de *Primeira Forma Fundamental* da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ no ponto $p \in S$ é definida em $T_p S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$, com $T_p S$ o plano tangente à superfície S no ponto p .

Mais especificamente, a forma quadrática I_p é a expressão de como a superfície S , que é regular, herda o produto interno usual do espaço $\mathbb{R}^3$. Assim, a primeira forma fundamental nos permite realizar medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente.

Podemos também expressar a I_p em uma base, obtendo desse modo os coeficientes da I_p , com a expressão dada na observação a seguir.

Observação 1. Os coeficientes da I_p em uma base $\{X_u, X_v\}$ do $T_p S$ no ponto p são dados por

$$E(u, v) = |X_u|^2, \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle \text{ e } G(u, v) = |X_v|^2.$$

No estudo de qualquer Geometria estamos interessados em realizar medidas, em especial na Geometria Diferencial. A Primeira forma fundamental é o que permite realizar alguns tipos de medidas na superfície como: ângulo entre dois vetores e área. Outro tipo de medida que é do interesse nesta geometria, é a taxa de variação do plano tangente. Conforme elucida a definição e a observação seguintes.

Definição 3. A segunda forma fundamental em $p \in S$ é denotada por II_p e definida em $T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ como $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle_p$, com dN_p sendo a diferencial da aplicação Normal de Gauss².

Observação 2. Seja α' um vetor tangente à superfície S no ponto p . A expressão da Segunda Forma Fundamental em coordenadas locais é dada por

$$II_p(\alpha') = (u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g,$$

com $e = -\langle N_u, X_u \rangle$; $f = -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle$ e $g = -\langle N_v, X_v \rangle$.

Utilizando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental (Observação 1 e 2) é possível obter uma expressão para a curvatura média H , a saber,

$$H = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}. \quad (2)$$

²A aplicação normal de Gauss é definida por $N : S \rightarrow S^2$, tal que $N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$.

A expressão (2) para H é posterior a expressão de H como a média aritmética entre as curvaturas principais k_1 e k_2 , $\frac{k_1+k_2}{2}$, sendo mostrado por Meusnier dezesseis anos após estabelecido a equação de Lagrange, que $H = 0$ é equivalente a resolver a Equação (1) de Lagrange, CARMO (2004). Logo, o trabalho de encontrar Superfície Mínimas se reduz a obter uma superfície que possua $H = 0$ em todos os pontos desta superfície.

Definição 4. Uma *Superfície parametrizada regular é Mínima* quando a curvatura média $H = 0$ para todo ponto $p \in S$ e qualquer parametrização X de S .

Sabendo o que caracteriza uma Superfície ser Mínima no sentido da nossa definição, podemos discutir se há relações entre as Superfícies Mínimas e superfícies de área mínima. O próximo resultado associa essas superfícies, mostrando que estas sujeitas algumas hipóteses, coincidem.

Teorema 5. *Seja X uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ um domínio limitado. Então X é uma Superfície Mínima se, e somente se a derivada da função área $A'(0) = -2 \int_D H h \sqrt{EG - F^2} du dv$ é nula para qualquer região D , e qualquer variação normal de $X(\overline{D})$.*

O Teorema 5 estabelece que toda superfície mínima, tem a região limitada $X(\overline{D})$ como um ponto crítico para a função área, visto que $A'(0) = 0$ para qualquer variação normal de $X(\overline{D})$. Da Definição 4, se existe uma superfície S mínima que tenha uma curva C como fronteira, então a curvatura média é identicamente nula em S . Logo do Teorema 5, as superfícies de área mínima, que são as de menor área sujeita a uma curva C de fronteira, são superfícies mínimas, ou seja possuem $H = 0$. No entanto, se $H = 0$ em S , essa superfície não tem necessariamente área mínima³.

2.2 Funções holomorfas e meromorfas

Os elementos discutidos nessa subseção são inerentes ao cálculo de uma variável complexa. Definindo o que entendemos nesse trabalho como funções holomorfas, ou analíticas, pólos e zeros de funções. Visando determinar caracterizações para funções holomorfas e meromorfas, as quais são utilizadas para estabelecer a Representação de Weierstrass.

Definição 6. Considere $\gamma = u + iv$ com $\gamma \in \mathbb{C}$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa quando escrevemos $f(\gamma) = f_1(u, v) + if_2(u, v)$, com f_1 e f_2 funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em U , as quais satisfazem a equação de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}$ e $\frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}$.

Se uma função deixa de ser holomorfa em algum ponto $z = z_0$ este ponto é denominado *ponto singular*. Além disso, se existe algum disco aberto perfurado centrado em z_0 , $(0 < |z - z_0| < R)$, em que a função seja holomorfa, $z = z_0$ é dito *singularidade isolada*.

³Superfícies que tem $H = 0$, são pontos críticos da função área, para qualquer variação normal da superfície. Apesar disso, não podemos garantir sem maiores restrições, que este ponto seja sequer um ponto de mínimo relativo para qualquer variação normal, e muito menos um mínimo absoluto, o qual pode não existir.

Suponha que f tenha uma singularidade isolada em $z = z_0$. Gostaríamos de obter uma representação em série de potências para f , mas devido a f não ser holomorfa em um disco aberto centrado em z_0 , não podemos utilizar a série de Taylor, de forma direta, para obter tal representação. Fazendo necessário a definição seguinte.

Definição 7. (Série de Laurent). Se f é holomorfa em uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ exceto em um ponto $z_0 \in \Omega$, em que z_0 é uma singularidade isolada, podemos representar f por uma série de potências que tenha z_0 como centro

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad (3)$$

a qual converge para $|z - z_0| < R$.

A primeira parte da série de Laurent é a parte principal, enquanto que a segunda é denominada de parte analítica.

Dado que uma função f é holomorfa a menos de singularidades isoladas, podemos representá-la em série de Laurent. Mostremos um exemplo para melhor ilustrar essa definição.

Exemplo 1. A função $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ não é holomorfa em $z_0 = 0$, mas f possui uma singularidade isolada nesse ponto. Deste modo, podemos utilizar a série de Laurent para representar f . Vejamos como.

A função definida por $\sin z$ é holomorfa em $\mathbb{C}$, para esta função podemos utilizar a expansão em série de Taylor, escrevendo a função $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Note que dividindo os dois lados da equação anterior por z^4 , obtemos a representação de f pela série de Laurent, dada por $\frac{\sin z}{z^4} = [\frac{z^{-3}}{1!} + \frac{z^{-1}}{3!}] + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+5)!}$, com os dois primeiros termos sendo a parte principal, e os outros termos constituindo a parte analítica, de acordo com (3).

Quando escrevemos uma função f em série de Laurent podemos classificar seus pontos de singularidades isoladas em quatro tipos:

- (i) Se a parte principal for zero, ou seja, se todos os coeficientes a_{-k} em (3) forem nulos, $z = z_0$ é denominado **singularidade removível**.
- (ii) Se a parte principal em (3) contiver um número finito de termos não nulos, com o último coeficiente não nulo sendo a_{-n} , com $n \geq 1$, $z = z_0$ é denominado **pólo de ordem n** . Se $n = 1$ a singularidade é dita **pólo simples**.
- (iii) Se a parte principal em (3) contiver um número infinito de termos não nulos, $z = z_0$ é denominado **singularidade essencial**.

Notemos no Exemplo 1 que $a_{-1} = \frac{1}{3!}$, $a_{-2} = 0$ e $a_{-3} = \frac{1}{1!} \neq 0$, assim $z_0 = 0$ é um pólo de ordem $n = 3$, de acordo com a nossa classificação.

O nosso interesse está nas funções holomorfas e nas funções *meromorfas*, as quais são holomorfas a menos de singularidades isoladas, do tipo (i) ou (ii). **Notação:** $M(\Omega)$ é o conjunto de funções meromorfas na região Ω .

Definição 8. Uma função holomorfa f tem um zero de ordem n em $z = z_0$ quando

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Os próximos resultados servem de base para estabelecer um resultado que relaciona funções meromorfas e holomorfas, baseado em propriedades de pólos e zeros de ordem n .

Corolário 9. Uma aplicação f holomorfa em algum disco $|z - z_0| < R$ tem um zero de ordem n se, e somente se, $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ é holomorfa em $z = z_0$ e $\phi(z) \neq 0$.

Esse resultado diz que as funções holomorfas que possuem um zero de ordem n , podem ser escritas como o produto de uma função holomorfa $\phi \neq 0$ e um polinômio de grau n , reciprocamente, se a função permite essa representação, então ela tem um zero de ordem n .

Analogamente, podemos caracterizar um pólo de ordem n por meio do produto entre uma função ϕ holomorfa em um disco, e a função $\frac{1}{(z - z_0)^n}$.

Corolário 10. Uma aplicação f holomorfa em disco perfurado $|z - z_0| < R$ tem um pólo de ordem n se, e somente se, $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}$, com $\phi(z)$ holomorfa e $\phi(z_0) \neq 0$.

As demonstrações parciais dos Corolários 9 e 10 podem ser obtidas em (ZILL e SHA-NAHAM, p.304-305, 2009), enquanto que um dos lados da demonstração que é omitida, são consequências imediatas da definição de zero e pólo de ordem n .

3 Superfícies isotérmicas

Nessa seção exploramos algumas relações entre Superfícies Isotérmicas e Superfícies Mínimas. Também mostramos que o Catenóide é uma Superfície Mínima. Mas primeiramente, vamos definir o que é uma Superfície Isotérmica.

Definição 11. Dizemos que uma superfície regular X é isotérmica quando $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Observe que uma superfície é isotérmica quando ocorre a seguinte relação entre os coeficientes da primeira forma fundamental, $E = G$ e $F = 0$, (ver Observação 1).

Se X é uma Superfície Isotérmica, então o vetor X_u é ortogonal ao vetor X_v e ainda possuem a mesma norma. Além disso, para qualquer ponto que tomarmos na superfície, os ângulos entre os vetores tangentes são os mesmos. Assim, a grosso modo, as superfícies isotérmicas são aquelas que preservam ângulos.

Proposição 12. Seja X uma superfície regular e isotérmica. Então $X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N$, com $\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$.

Prova. Como X é isotérmica segue que $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Derivando a expressão anterior em respeito a u e depois a v , obtemos $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_{vv} \rangle =$

$-\langle X_{uv}, X_v \rangle$. Somando essas equações e utilizando a definição de soma de produto interno, obtemos que $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$. Analogamente mostramos que $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$.

Como $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$, pois são ortogonais, segue que o vetor $(X_{uu} + X_{vv})$ é paralelo a N . Também X é isotérmica decorrendo que a curvatura média H pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2} \frac{E(g+e)}{E^2} = \frac{1}{2} \frac{g+e}{E} \implies 2H\lambda^2 = -(\langle N_u, X_u \rangle + \langle N_v, X_v \rangle) = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle. \quad (4)$$

Observe que N é um vetor unitário, segue daí que $2H\lambda^2 = |\langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle| = |X_{uu} + X_{vv}|$. Sendo suficiente a norma e o sentido para caracterizar um vetor, concluímos do paralelismo entre N e $(X_{uu} + X_{vv})$, e de (4) que $X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 H N$. $\square$

O vetor $X_{uu} + X_{vv}$ é denominado de *Laplaciano de X* e denotado por ΔX . O resultado a seguir é consequência imediata do que acabamos de demonstrar. Ele estabelece relações entre Superfícies Mínimas, (Definição 4), e Superfícies Isotérmicas, (Definição 11).

Corolário 13. *Seja $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma superfície regular e isotérmica. Então X é mínima se, e só se as suas funções coordenadas x, y e z são harmônicas.*

Prova. Suponha que X é mínima, pela Definição 4 segue que $H = 0$. Como X é isotérmica segue da Proposição 12 que $\Delta X = 0$, portanto as funções coordenadas são harmônicas.

Por outro lado, se $\Delta X = 0$ então $2\lambda^2 H = 0$, assim $\lambda^2 = 0$ ou $H = 0$. Se $H \neq 0$, pela hipótese de X ser isotérmica e $\lambda^2 = 0$ então $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = 0$, consequentemente X não determina uma Superfície Regular, como a $dX = 0$, segue que dX não é injetiva, pois contrária a Definição 1 (item *iii*), o que é um absurdo. $\square$

Logo, sabendo que uma superfície é isotérmica, é suficiente verificar que o Laplaciano é harmônico, $\Delta X = 0$, para concluir que a superfície é mínima.

Por décadas, a solução da Equação (1) de Lagrange somente foi resolvida utilizando superfícies especiais. Por exemplo, podemos citar o Catenóide, que foi resultante da imposição restrições à equação de Lagrange. No entanto, Weierstrass obteve uma solução geral permitindo encontrar uma infinidade de exemplos. Apresentamos na próxima seção esse resultado, mais antes vamos comprovar que o Catenóide é uma Superfície Mínima utilizando os resultados desenvolvidos até então.

Exemplo 2. Considere a parametrização do Catenóide dada por $X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$, $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < \infty$. Calculemos os coeficientes da primeira forma fundamental.

$X_u = (-a \sin u \cosh v, a \cos u \cosh v, 0)$ e $X_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$, segue que $E = a^2 \cosh^2 v$, $G = a^2 \cosh^2 v$ e $F = 0$. Segue da Definição 11 que X é isotérmica, restando mostrar que $\Delta X = 0$ para concluirmos que X é mínima. Para isto vamos obter o Laplaciano.

$X_{uu} = (-a \cos u \cosh v, -a \sin u \cosh v, 0)$ e $X_{vv} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$, logo $\Delta X = X_{uu} + X_{vv} = 0$. Pelo Corolário 13 segue que o Catenóide é uma Superfície Mínima.

Vimos no exemplo anterior que o Corolário 13 da mecanismos para mostrar que uma Superfície é Mínima, entretanto, de nada ajuda à obter superfícies com essa propriedade. Com isto, apresentamos na próxima seção a Representação de Weierstrass. Este resultado sujeito a algumas condições, permite obter parametrizações de Superfícies Mínimas, mas especificamente, fornece Superfícies Mínimas orientadas em $\mathbb{R}^3$.

4 Representação de Weierstrass

Começamos agora a relacionar Superfícies Mínimas com funções holomorfas de uma variável complexa. Os resultados já discutidos e que apresentaremos se fazem necessários para introduzirmos a Representação de Weierstrass.

O próximo lema trata de uma condição necessária e suficiente para que uma superfície seja isotérmica, utilizando os coeficientes da primeira forma fundamental definidos na Seção 1, (ver Observação 1). Além disso, fornece mecanismos para determinar se uma superfície isotérmica é uma Superfície Mínima.

Lema 14. *Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e defina as funções complexas*

$$\varphi_1(\gamma) = x_{1_u} - ix_{1_v}, \quad \varphi_2(\gamma) = x_{2_u} - ix_{2_v}, \quad e \quad \varphi_3(\gamma) = x_{3_u} - ix_{3_v}. \quad (5)$$

Uma superfície X é isotérmica se, e somente se $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Se essa última igualdade é satisfeita X será uma Superfície Mínima se, e somente se φ_1, φ_2 e φ_3 são holomorfas.

Prova. Observemos as relações abaixo.

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 &= x_{1_u}^2 - 2ix_{1_u}x_{1_v} - x_{1_v}^2, \quad \varphi_2^2 = x_{2_u}^2 - 2ix_{2_u}x_{2_v} - x_{2_v}^2 \quad e \quad \varphi_3^2 = x_{3_u}^2 - 2ix_{3_u}x_{3_v} - x_{3_v}^2. \\ &\implies \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - 2iF - G. \end{aligned} \quad (6)$$

Segue que, se X é uma superfície isotérmica, então $E = G$ e $F = 0$, (ver Definição 11), utilizando (6), concluímos que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, valendo a recíproca. Logo X é uma Superfície Mínima e satisfaz $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2$ e x_3 são harmônicas $\Leftrightarrow (x_{1_{uu}} + x_{1_{vv}}, x_{2_{uu}} + x_{2_{vv}}, x_{3_{uu}} + x_{3_{vv}}) = 0 \Leftrightarrow x_{1_{uu}} = -x_{1_{vv}}, x_{2_{uu}} = -x_{2_{vv}}$ e $x_{3_{uu}} = -x_{3_{vv}}$, que é a primeira parte da equação de Cauchy-Riemann. A segunda parte decorre do Teorema de Cauchy-Schwarz, ou seja $x_{1_{uv}} = -(-x_{1_{vu}}), x_{2_{uv}} = -(-x_{2_{vu}})$ e $x_{3_{uv}} = -(-x_{3_{vu}})$, portanto φ_1, φ_2 e φ_3 são holomorfas. $\square$

Conseguindo uma expressão para as funções φ_1, φ_2 e φ_3 holomorfas, satisfazendo a condição do Lema anterior, podemos obter funções x_1, x_2 e x_3 resolvendo três Equações Diferenciais Parciais (EDPs), e assim determinar uma Superfície Mínima. O teorema abaixo torna viável tudo isso, dando uma representação para as funções φ_k com $k = 1, 2$ e 3 , as quais satisfazem as propriedades desejadas.

Teorema 15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$, $g(z)$ uma função meromorfa em Ω e $f(z)$ holomorfa em Ω tendo a propriedade que em cada ponto no qual $g(z)$ tem pólo de ordem m , $f(z)$ tem um zero de ordem $2m$. Então as funções*

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad e \quad \varphi_3 = fg \quad (7)$$

são holomorfas em Ω e satisfazem

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0. \quad (8)$$

(Recíproca). Toda tripla de funções holomorfas em Ω satisfazendo (8) pode ser representada na forma de (7), exceto para $\varphi_1 = i\varphi_2$ e $\varphi_3 = 0$.

Prova. É imediato que φ_k , $k = 1, 2, 3$ são funções holomorfas, exceto em $z = z_0$. Mostremos que em $z = z_0$ também o são. Da propriedade exigida das funções f e g segue dos Corolários 9 e 10 que as φ_k , $k = 1, 2, 3$ podem ser escritas centradas em z_0 como $\varphi_1 = \frac{1}{2}\phi(z)(z - z_0)^{2m} - \phi^3(z)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\phi(z)(z - z_0)^{2m} + \phi^3(z)$ e $\varphi_3 = \frac{1}{2}\phi(z)(z - z_0)^m$, válidas em um disco perfurado $|z - z_0| < R$ e com $\phi(z_0)$ holomorfa. Assim em $z = z_0$ as funções φ_1 , φ_2 e φ_3 são funções holomorfas. Ainda,

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \frac{1}{4}f^2(g^4 - 2g^2 + 1) - \frac{1}{4}f^2(g^4 + 2g^2 + 1) + f^2g^2 \equiv 0,$$

o que demonstra a primeira parte do Teorema.

Para recíproca defina $f = \varphi_1 - i\varphi_2$ e $g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$ e escreva a expressão (8) na forma

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2 \implies \varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -fg^2. \quad (9)$$

Da Expressão (9) decorre que

$$2\varphi_1 = -fg^2 - i\varphi_2 + \varphi_1 = f(1 - g^2) \implies \varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2). \quad (10)$$

$$2i\varphi_2 = -fg^2 + i\varphi_2 - \varphi_1 = -f(1 + g^2) \implies \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2). \quad (11)$$

$$\varphi_3 = (\varphi_1 - i\varphi_2)\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}\right) = fg. \quad (12)$$

O que conclui a prova do teorema. $\square$

Observação 3. As representações (10), (11) e (12) são válidas para qualquer φ_k , exceto para $\varphi_1 = i\varphi_2$ e $\varphi_3 = 0$, pois utilizamos desse fato para realizarmos as divisões para obter as expressões anteriores.

Observação 4. Note que se f e g forem funções holomorfas a exigência de f e g terem a propriedade de que onde g tem um pólo de ordem m , f tenha um zero de ordem $2m$, não se faz necessária.

Caso a função g seja holomorfa pode-se questionar a sua necessidade, vejamos. Se a ordem de zeros de f é menor do que $2m$ as funções φ_k , $k = 1, 2, 3$, não seriam holomorfas em $z = z_0$. Mas suponha que a condição dada pelo teorema fosse: onde g tem um pólo de ordem m , f tem um zero de ordem maior que $2m$, ou seja, um zero de ordem $2m + 1$. Se isso ocorre, utilizando (9) e (10), teríamos que

$$f(z) = \phi(z)(z - z_0)^{2m+1} \text{ e } g(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \implies -fg^2 = -\phi^3(z)(z - z_0). \quad (13)$$

Por outro lado, da definição de f e g na demonstração do Teorema, segue que $-fg^2 = (\varphi_1 + i\varphi_2)$, igualando a expressão anterior e (13) e obtemos $f g^2(z) = \phi^3(z)(z - z_0) = -(\varphi_1 + i\varphi_2)$ segue que

$fg^2(z_0) = 0 \implies \varphi_1 = -i\varphi_2$. Logo $\varphi_1 = -i\varphi_2 = 0$ e $\varphi_2 = 0$. Portanto $\varphi_1 = 0 = i\varphi_2$, o que é um absurdo, pois contraria a Observação 3.

Já sabemos como obter as funções φ_k que satisfazem a condição do Lema 14. Como discutido anteriormente, se resolvermos as três EDPs, determinadas pelas Equações 7 de variáveis u e v , podemos determinar Superfícies Mínimas. Assim a Representação de Weierstrass fornece a solução das EDPs determinadas pela Equação (7) do Lema 14, que são equivalentes a Equação (1) determinada inicialmente por Lagrange, para obter Superfícies Mínimas.

Teorema 16. (*Representação de Weierstrass*). *Toda Superfície Mínima em $\mathbb{R}^3$, definida em um domínio simplesmente conexo Ω contido em $\mathbb{C}$, pode ser representada parametricamente por*

$$x_k(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z \varphi_k(w)dw\right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (14)$$

com as funções φ_k tendo as propriedades do Teorema 15.

Prova. Para provar este teorema é necessário mais um resultado o qual foge aos objetivos deste trabalho, portanto a omitimos. Para o leitor que tenha interesse, recomendamos consultar o trabalho de Silva (2007) e para uma demonstração mais geral Pereira (2013).

Vamos dar uma noção intuitiva da prova utilizando os teoremas mostrados anteriormente. Olhemos para o Lema 14 e o Teorema 15, observemos as relações entre estes resultados e a Representação de Weierstrass.

Se a Equação (14) tem as propriedades do Teorema 15, então as φ_k , com $k = 1, 2, 3$, são holomorfas e satisfazem $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Consequentemente pelo Lema 14 a parametrização X está relacionada com as φ_k definindo uma Superfície Mínima. Assim, resta resolver a Equação (14) para que possamos deixá-la explícita. $\square$

Quase um século foi necessário para obter uma solução geral para a equação de Lagrange, que foi dada apenas em 1866 por Weierstrass. Esse resultado permitiu grandes avanços da Geometria Diferencial o que tange à Superfícies Mínimas, sendo uma área de constante evolução atualmente⁴.

5 Aplicações

Vimos no Corolário 13 da Seção 3 e o Lema 14 da Seção 4 modos mais práticos, que a definição, de mostrar que uma Superfícies é Mínima, entretanto nenhum desses resultados permitia obter tais superfícies. Por outro lado, a Representação de Weierstrass além de dar mecanismos de mostrar que uma superfície é Mínima (se a superfície puder ser parametrizada pela Equação (14)), ela também possibilita uma solução completa à Equação de Lagrange.

⁴[...]Abel Prize 2019 foi concedido a Karen Uhlenbeck. As teorias que ela desenvolveu revolucionaram o entendimento de superfícies mínimas, como as formadas por bolhas de sabão, e outros problemas de minimização em dimensões mais altas. KAREN (2019).

Exemplos particulares de Superfícies Mínimas podem ser obtidos tomando funções f que sejam holomorfas e outras funções g meromorfas, definidas em um domínio Ω simplesmente conexo, que tenham a propriedade de cada ponto no qual g tem um pólo de ordem m , f tenha um zero de ordem $2m$. Para isto, basta utilizar o Teorema 15, o qual fornece uma fórmula para obter cada uma das funções φ_k com as propriedades desejadas, por meio de combinações das funções f e g . Por fim, resolvendo a Equação (14) dada na Representação de Weierstrass para cada φ_k com $k = 1, 2, 3$, obtemos a parametrização de uma Superfície Mínima.

Para finalizar este trabalho, utilizamos a solução de Weierstrass para obter duas Superfícies Mínimas: o Helicóide e a Superfície de Enneper.

Exemplo 3. (Helicóide). Tome $M(\Omega) = \mathbb{C}$. Defina $g(z) = -ie^z$ e $f(z) = e^{-z}$ funções holomorfas em $\mathbb{C}$, (ver Observação 4). Calculemos as φ_k com $k = 1, 2, 3$ utilizando o Teorema 15.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2}e^{-z}(1 - (-ie^z)^2) = \frac{1}{2}e^{-z}(1 + e^{2z}) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cosh z. \\ \varphi_2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) = \frac{1}{2}e^{-z}(1 + (-ie^z)^2) = \frac{1}{2}(-e^z + e^{-z}) = -\sinh z. \\ \varphi_3 &= fg = e^{-z}(-ie^z) = -i.\end{aligned}$$

Utilizando a Representação de Weierstrass e que $z = u + iv$, segue da Equação (14) que

$$\begin{aligned}x_1(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z \cosh dz\right) = \operatorname{Re}(\sinh z - \sinh 0) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cos v = \sinh u \cos v. \\ x_2(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z -i \sinh z dz\right) = \operatorname{Re}(-i \cosh z - i \cosh 0) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \sin v = \sin v \sinh u. \\ x_3(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z -i dz\right) = \operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Re}(-iu - i^2v) = v.\end{aligned}$$

Logo do Teorema 16 temos que $X(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$, que é a parametrização do Helicóide (superfície representação na Figura 1), é uma Superfície Mínima.

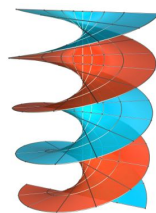


Figura 1: Helicóide.

Fonte: Perreira 2013.

Carmo (2004, p.39) comenta que em 1842, Catalan provou que o Helicóide é a única Superfície Mínima que tem a propriedade de ser regrada (por cada ponto passa uma reta totalmente contida na superfície).

Exemplo 4. (Superfície de Enneper). Considere $M(\Omega) = \mathbb{C}$, $f = 1$ e $g = z$ funções holomorfas em $\mathbb{C}$, (ver Observação 4). Calculemos as φ_k , $k = 1, 2, 3$ utilizando o Teorema 15.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2}(1 - g^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u^2 - iv + \frac{v^2}{2},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}f(1+g^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2 + iv - \frac{v^2}{2} \text{ e } \varphi_3 = fg = z = u + iv.$$

Do Teorema 16, utilizando a Equação (14), segue que

$$\begin{aligned}x_1(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{1}{2}(1-z^2)dz\right) = Re\left(\frac{1}{2}u + iv - \frac{1}{3}(u+iv)^3\right). \\x_2(z) &= Re\left(\int_0^z \frac{i}{2}(1+z^2)dz\right) = \frac{-v - u^2v + \frac{v^3}{3}}{2}. \\x_3(z) &= Re\left(\int_0^z z dz\right) = Re\left(\frac{u^2 + 2iv - v^2}{2}\right) = \frac{u^2 - v^2}{2}.\end{aligned}$$

Logo $X(u, v) = \left(\frac{u+uv^2-\frac{1}{3}u^3}{2}, \frac{-v-u^2v+\frac{v^3}{3}}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$ determina uma Superfície Mínima.

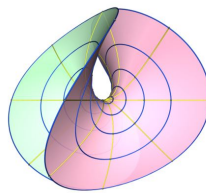


Figura 2: Superfície de Enneper.

Fonte: Perreira 2013.

Na Figura 2 está representado a Superfície de Enneper parametrizada por X .

Referências

- CARMO, M. P. do. (2004). **Superfícies mínimas**. Rio de Janeiro: IMPA.
- CARMO, M. P. do.(2014). **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. RJ: SBM.
- KAREN Uhlenbeck. **IMPA**, 19 abr. 2019. Disponível em:
<https://impa.br/noticias/karen-uhlenbeck-e-a-primeira-mulher-a-receber-o-abel-prize/>. Acesso em 06 jul. 2019.
- PEREIRA, F. A. (2013). **Superfícies mínimas em R^3** . Dissertação de Mestrado -PUC RJ.
- ROSA, M.; CONEJO, P.D. **Uma relação entre superfícies mínimas e superfícies de área mínima**. XXXII Semana Acadêmica da Matemática; 29 de outubro a 01 de novembro. Cascavel; 2018.
- SILVA, G. (2007). **A aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas com curvatura Total Finita**. Dissertação de Mestrado - UFPP.
- ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. **Curso introdutório à análise complexa com aplicações**. 2. ed. Rj: LTC, 2009.

A modelagem matemática como metodologia no ensino de funções: relato de uma experiência

Thalia Falquievicz Corassa
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
thaliacorassa@hotmail.com

Bruno Gonçalves
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
brunomiguel281@gmail.com

Resumo: O presente artigo relata algumas considerações acerca das atividades desenvolvidas durante o estágio supervisionado, no primeiro semestre do ano de 2019, na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, ofertada no quarto ano do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel, com uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Durante as aulas, trabalhamos com o conteúdo de função utilizando como metodologia de ensino a Tendência Modelagem Matemática na Educação Matemática. Além de relatar as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas no decorrer da regência, visamos expor algumas ideias apresentadas pelos autores acerca da temática. Concluimos que, a Tendência Modelagem Matemática na Educação Matemática é uma metodologia oportuna no ensino-aprendizagem de Matemática, pois, por meio dela é realizada a articulação entre Matemática e realidade, fazendo com que os conceitos matemáticos tornem-se significativos para os alunos, levando-os a construir seu próprio conhecimento e desenvolver o pensar matematicamente.

Palavras-chave: Funções; Modelagem Matemática; Ensino Médio.

1 Introdução

O presente trabalho tem o intuito de apresentar algumas reflexões acerca das atividades desenvolvidas durante o primeiro semestre do ano de 2019, na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, ofertada no quarto ano do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel. A disciplina é dividida entre parte teórica, na qual é destinada tempo para discussões referentes a temas da educação e também preparação de materiais, e parte prática, em que é realizada a regência, na qual os acadêmicos são encaminhados até uma instituição de ensino, realizam observações nas salas de aula e, posteriormente, ministram aulas. Com isso, dirigimo-nos até um colégio público estadual do município de Cascavel, do qual escolhemos uma turma do 1º ano do Ensino Médio para desenvolver as atividades. Primeiramente fizemos seis aulas de observação e ambientação com o objetivo de conhecermos a turma, identificar como se comportavam e como realizavam as atividades sugeridas pela professora. Nas aulas que ministramos, trabalhamos com o conteúdo de função, que era o conteúdo programado pela professora para o período

no qual realizamos o estágio, utilizando como metodologia de ensino a Tendência Modelagem Matemática na Educação Matemática.

A Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino que propicia a vinculação entre Matemática e realidade. De acordo com Biembengut e Hein (2002, p.13), “Matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a Modelagem é um meio de fazê-los interagir”. Além disso, entendemos que é necessário que a Matemática seja trabalhada de modo a possibilitar que os alunos não apenas decorem fórmulas e algoritmos, é preciso ensinar o significado dos conceitos, para que os alunos possam aplicá-los em diferentes situações, inclusive em suas necessidades do dia a dia, compreendendo a importância da Matemática em suas vidas.

Segundo Burak (2004, p.10), “quando o aluno vê sentido naquilo que estuda, em função da satisfação das suas necessidades e interesses, ele trabalhará com entusiasmo e perseverança, acarretando o início da formação de atitudes positivas em relação à Matemática”. Ainda, Almeida e Dias (2004, p. 25) relatam que a Modelagem pode “proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos da Matemática”.

Diante disso, entendemos que trabalhar com temas que estão presentes na realidade dos alunos, de uma forma diferenciada das que estão habituados, despertará neles além do interesse e motivação, a criticidade em relação à Matemática.

Nas aulas da regência, trabalhamos o conteúdo de função por meio de situações presentes na nossa realidade, como o carregamento da bateria de um celular, realizando análises acerca da relação entre o tempo e a carga da bateria e o impacto do carregamento na conta da energia. Dividimos os alunos em grupos, deixando-os construir suas hipóteses e soluções, após isso, realizamos socializações dos resultados obtidos por cada grupo. Diante do exposto, buscamos no presente trabalho, apresentar as tarefas realizadas, bem como o desenvolvimento delas e a forma como foram abordadas em sala de aula, descrevendo os apontamentos, os debates e os diversos conceitos tratados. Com o avançar das aulas e o desenvolvimento das atividades adquirimos experiência no trabalho com a Modelagem Matemática em sala de aula. Nas seções seguintes descrevemos o desenvolvimento das atividades e as considerações acerca da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

2 Descrição das atividades

Nos dias atuais está explícito o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem da Matemática. Dentre os motivos que acarretam essa desmotivação acredita-se que está a forma como essa disciplina é abordada em sala de aula e a desvinculação da Matemática ensinada na escola com a realidade dos alunos. Os documentos oficiais da educação brasileira têm alertado para a necessidade dessa integração: “O foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes” (BRASIL, 2018, p.

528). Portanto, é necessário que na escola, se vá além da memorização de fórmulas e cálculos mecânicos, mas se ensine o significado dos conceitos matemáticos, pois assim o aluno poderá identificar a importância da Matemática em seu cotidiano e em diferentes situações.

Diante desta visão, as Tendências em Educação Matemática surgem com o intuito de promover um ensino da Matemática mais relevante e instigante, diferente das metodologias tradicionais, ou seja, “surgiram de movimentos que tiveram como objetivo proporcionar um ensino de matemática mais eficiente” (MAZUR, 2012, p. 14). Tem-se clareza que o ensino-aprendizagem da Matemática fundamentado nas Tendências promove uma melhor compreensão dos conceitos ensinados, tornando a construção do conhecimento matemático mais significativo e agradável. A autora supracitada acredita que “uma proposta metodológica, fundamentada nas Tendências em Educação Matemática faça a diferença na compreensão, no significado e aplicação do conhecimento matemático, especialmente no ensino fundamental, que é onde se constrói a base dessa ciência” (MAZUR, 2012, p. 14).

Segundo esse aspecto, a Modelagem Matemática, uma das Tendências em Educação Matemática, “pode ser vista como um forte instrumento para que os estudantes possam ter clareza da importância da Matemática na vida das pessoas, pois suas aplicações esclarecem e “dão luz” aos conteúdos matemáticos” (CALDEIRA, 2005, p. 1).

De acordo com Barbosa, Modelagem é “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6). A Modelagem promove a articulação entre Matemática e realidade, na qual os alunos são instigados a compreender os conceitos, sabendo aplicá-los em diferentes contextos, construindo assim, seu próprio conhecimento. Caldeira (2005, p. 6) ressalta que,

o aprender se faz também num contexto de integração social e que o aluno constrói o seu próprio pensamento, confrontando com os demais colegas, e este conhecimento – que se constrói – toma sentido por meio de ações que permitam resolver um problema, responder a uma questão, numa situação em que o aluno tenha podido se apropriar do contexto e consiga aplicá-los em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem, ou seja, transferíveis a novas situações.

Conforme Barbosa (2003), as experiências de Modelagem podem variar de acordo com o desenvolvimento e as tarefas que competem ao professor e aos alunos. Diante disso, classifica as atividades de Modelagem Matemática em três casos, distinguindo as responsabilidades destinadas aos alunos e ao professor em cada caso.

No primeiro caso, “o professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução” (BARBOSA, 2001, p. 8). Neste caso, o trabalho é desenvolvido por meio da situação e do problema concedido pelo docente, sendo assim, os alunos não precisam sair da sala de aula em busca de dados.

No segundo caso, “o professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução” (BARBOSA, 2001, p.

8). Neste caso, o professor disponibiliza o problema inicial, porém os alunos precisam buscar dados fora da sala de aula para resolver o problema proposto.

Por fim, no terceiro caso, “a partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema” (BARBOSA, 2001, p. 8-9). Nesse caso, todo o trabalho é destinado aos alunos, sendo a formulação do problema, coleta dos dados e resolução.

Diante dos casos apresentados por Barbosa (2001), o trabalho com a Modelagem Matemática que desenvolvemos no período de regência, em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo prévio de trabalhar o conteúdo de função, foi embasado no segundo caso, por meio do qual apresentamos o tema e o problema formulado, cabendo aos alunos a tarefa de coletar os dados fora da sala de aula e resolver o problema por meio dos dados coletados.

Durante as aulas optamos por trabalhar com os alunos em grupos de quatro a cinco integrantes, pois, consideramos que o método de trabalho em grupo propicia a troca de conhecimentos, tornando o trabalho mais dinâmico e agradável. Além disso, seria uma forma viável para conseguirmos acompanhar o desenvolvimento da atividade em todos os grupos, tirando dúvidas e atribuindo sugestões.

Para dar início à atividade de Modelagem Matemática, disponibilizamos aos alunos o tema, intitulado por “carregamento da bateria de um celular”, o qual foi discutindo e pensado junto com nosso professor, Tiago Emanuel Klüber¹. Ele ministrou a disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática no nosso terceiro ano do curso e nesta trabalhamos atividades diferenciadas, baseadas na Modelagem Matemática. Assim, surgiu o interesse em desenvolver este trabalho no estágio, propiciando-nos a experiência de trabalhar com uma metodologia diferenciada. Escolhemos o tema “carregamento da bateria de um celular”, pois admitimos que ele esteja presente na realidade dos alunos, e isso despertaria o interesse e a curiosidade deles pela atividade. De acordo com Santana e Santana (2009, p. 5),

a Modelagem Matemática, em muitas experiências, parte de uma situação não matemática sobre a qual, em geral, tem-se alguma curiosidade. Geralmente, é esta curiosidade que leva um grupo de estudantes a aceitar o convite do professor para o desenvolvimento de um ambiente de Modelagem Matemática.

Então, solicitamos aos alunos que realizassem a coleta de dados em casa, a qual deveria ser desenvolvida da seguinte forma:

- ✓ Colocar o celular para carregar quando ele estiver com uma porcentagem de bateria inferior a 40%;
- ✓ Cronometrar intervalos de 5 em 5 minutos, sendo que, a cada intervalo os valores correspondentes ao tempo e porcentagem devem ser anotados em uma tabela construída pelo aluno;
- ✓ No momento do carregamento não fazer o uso do celular de nenhuma forma, para que sejam evitados resultados inconsistentes.

¹O Prof. Dr. Tiago Emanuel Klüber é também orientador do trabalho de conclusão de curso de uma das autoras desse texto.

Posteriormente, os alunos teriam como tarefa em grupo, escolher os dados de um aluno do grupo, para analisar, levantar hipóteses e encontrar formas de responder a seguinte interrogação:

- ✓ A partir dos dados coletados, o que se pode observar em relação ao tempo e a carga da bateria? Justifique.

No desenvolvimento da atividade, circulávamos pela sala observando as discussões dos alunos no grupo. Um grupo, logo ao observar os dados que eles coletaram, levantaram a seguinte hipótese: “a carga da bateria vai aumentando de forma igual no passar do tempo, logo, a bateria está em função do tempo”. Relatamos que a ideia exposta estava correta, e que deviam tentar representar essa ideia de alguma forma, como por exemplo, por meio de um gráfico ou uma representação algébrica.

De modo geral, os grupos pensaram primeiramente em realizar gráficos por meio da tabela de porcentagem e tempo que haviam anotado. Um grupo ao realizar o gráfico dos dados da tabela, traçou a reta passando pelos pontos. Diante disso, realizamos a seguinte interrogação: “você sabem o que está acontecendo no intervalo entre 5 e 10 minutos? A carga da bateria está crescendo de forma igual?”. Os alunos pensaram um pouco, quando um deles respondeu: “não sabemos o que acontece, pode oscilar”. Desta forma, os alunos perceberam que não podiam ligar os pontos, pois não era possível ter certeza do que acontecia nos intervalos de tempo.

Seguindo com a atividade, realizamos a socialização dos resultados na lousa, um integrante de cada grupo reproduziu a construção do gráfico realizada pelo grupo. As soluções foram parecidas: gráficos de pontos representando a tabela de dados referente ao tempo e carga da bateria de um celular. Porém, um dos grupos ainda realizou o gráfico dos dados da tabela, traçando a reta passando pelos pontos. Desta forma, explicamos novamente que não era correto, pois não era possível saber o que ocorria nos intervalos de tempo. Percebemos neste momento a falta de atenção por parte dos alunos, pois repetiram um erro que já havia sido discutido no grupo. No entanto, o erro foi importante para tratarmos com os demais alunos sobre o que significa ligar os pontos numa representação gráfica.

Alguns alunos iniciaram a coleta com a carga da bateria em zero, já outros com um pouco de carga. Em alguns gráficos houve pequenas variações na carga da bateria, outros a carga cresceu linearmente. Um aluno comentou que nos gráficos que não houve variação foi porque a bateria não era viciada. Outra aluna ao explicar sua construção comentou que o gráfico era crescente, pois se fosse decrescente a bateria estaria descarregando. Outro aluno relatou que no celular dele tem esses gráficos, apresentando o que acontece com a carga da bateria, quando aumenta e quando diminui.

Diante disso, percebe-se que a participação dos alunos na atividade era contínua. E que a socialização é uma etapa fundamental nas atividades desse caráter, na qual o docente deve tomar o devido cuidado para valorizar todas as soluções, desde as mais simples até as mais aprimoradas, instigando os alunos a se dedicar cada vez mais no desenvolvimento das atividades.

Após a socialização dos gráficos de pontos e as colocações feitas por nós e pelos alunos, realizamos a seguinte pergunta: “o que devemos fazer para poder traçar a reta no gráfico, ou

seja, como podemos ter certeza do que acontece entre os intervalos de tempo?”. Solicitamos aos alunos que discutissem em grupo, procurando formas para responder essa pergunta.

Percebemos que a maioria dos grupos apresentaram grande dificuldade, não entendendo o que poderiam fazer para responder à pergunta. Diante disso, achamos viável realizar algumas explicações para que ficasse mais claro. Explicamos que para traçar a reta era necessário encontrar uma lei de formação para o gráfico. Como os alunos já haviam relatado que a carga da bateria está em função do tempo, então explicamos que deveriam encontrar uma função na qual seria possível saber o que acontece com a carga da bateria em qualquer tempo. Explicamos que uma forma de encontrar essa função seria dividir a variação da carga da bateria pela variação do tempo e então analisar o que acontece. Alguns grupos realizando esses cálculos perceberam que ao encontrar o valor das variações, poderiam multiplicar por qualquer tempo, encontrando assim o valor da carga da bateria que estava no gráfico que já tinham realizado. Porém, teve grupos que o carregamento da bateria não começou quando a carga da bateria era zero, desta forma não perceberam que tinham que encontrar a variação que seria multiplicada por qualquer tempo e ainda somar a carga inicial da bateria, para assim, encontrar o valor total da carga da bateria naquele determinado tempo. Portanto, tivemos que fazer algumas intervenções em alguns grupos, instigando-os a pensar sobre suas resoluções. Por meio da nossa explicação e intervenção, todos os grupos conseguiram encontrar a lei de formação e realizaram a construção do gráfico.

Posteriormente, realizamos a socialização dos resultados, um aluno de cada grupo escreveu na lousa a função encontrada, construindo assim, o gráfico dessa função. Como os dados coletados pelos alunos eram diferentes para cada grupo, houve diferentes funções e diferentes gráficos, alguns por exemplo, começavam do zero, outros não.

Diante dessa atividade, os alunos compreenderam que a função podia ser aplicada para qualquer tempo, não somente os coletados e que por meio dessa função poderiam traçar a reta no gráfico. Um aluno comentou: “agora sabemos o que acontece nos intervalos de tempo”.

Desta forma, por meio do desenvolvimento da atividade os alunos foram capazes de responder à interrogação inicial: “A partir dos dados coletados o que se pode observar em relação ao tempo e a carga da bateria? Justifique”. Perceberam que o carregamento da bateria de um celular ocorre por meio de uma função, sendo que a carga da bateria do celular está em função do tempo e que esta segue um modelo aproximado de uma função linear.

Percebemos durante a realização desta atividade que a maioria dos alunos se interessaram e interagiram. Foi notório que trabalhar conteúdos utilizando problemas do cotidiano dos alunos, despertou o interesse e a participação deles.

Prosseguindo com a atividade, ainda sobre os celulares, fizemos a seguinte questão:

✓ O gasto deste carregamento causa que impacto na conta de energia?

Diante da interrogação disponibilizada, um aluno respondeu: “causa muito impacto”. Já outro confrontou dizendo: “causa pouco impacto, comparado com uma geladeira, por exemplo”.

Desta forma, explicamos que deviam ter certeza do que estavam afirmando, ou seja, precisavam de dados que provassem suas hipóteses. Para a realização dessa etapa, havíamos solicitado aos alunos, em aulas anteriores, para que pesquisassem os dados sobre a capacidade de carga (mAh - miliampere) e a voltagem da bateria de seus celulares. Com esses dados em mãos, os alunos seriam capazes de solucionar a questão apresentada.

Para iniciar, expusemos na lousa os conceitos necessários para a resolução do problema. Neste momento, trabalhamos com a interdisciplinaridade, abordando conceitos físicos. Passamos na lousa a fórmula para descobrir a potência da recarga de um celular, explicando o que significava cada notação. Para os alunos entenderem melhor o que deviam fazer, explicamos por meio de um exemplo, utilizando a capacidade e a voltagem da bateria de um celular nosso. Alertamos que para realizarem os cálculos da potência de seus celulares, deveriam dividir a intensidade da corrente por 1000, pois a capacidade do celular é dada em miliampere. Disponibilizamos também, o valor cobrado pela concessionária de energia por cada Wh de energia gasta, explicando que deveriam encontrar a potência de seu celular e depois multiplicar pelo valor do Wh, descobrindo o valor gasto por cada recarga da bateria do celular. Solicitamos que realizassem os cálculos para diferentes períodos de tempo, por exemplo, uma semana, um mês, um ano, anotando em uma tabela e em seguida realizassem a construção de um gráfico, utilizando como unidade de medida de tempo meses, ou seja, de um mês até um ano. O objetivo era que cada grupo descobrisse quanto seu celular gasta de energia no período de um ano. Então solicitamos que escolhessem no grupo um dos dados que foram coletados para realizarem a atividade, para que houvesse somente uma solução por grupo.

Em seguida, realizamos a socialização dos resultados. Com a construção dos gráficos na lousa, os alunos explicaram a resolução, apresentando os cálculos e os valores do gasto de energia no período de um ano. Os gráficos foram todos semelhantes, havendo uma variação no gasto anual entre R\$ 2,77 a R\$ 3,63 entre os grupos, considerando por exemplo, que um grupo afirmou utilizar dados de duas recargas ao dia.

Está socialização foi muito proveitosa, pois os demais alunos realizavam perguntas aos que estavam apresentando, como por exemplo: “o gráfico é crescente ou decrescente?” “qual seria o gasto em três anos?”. Desta forma, foi possível observar se de fato os alunos estavam compreendendo os conceitos. Alguns alunos ainda relataram que o gasto é dependente e o tempo é independente, ou seja, o gasto depende do tempo.

Realizada a socialização, os alunos perceberam com a atividade que o gasto é muito pouco, não causando grande impacto na conta de energia. Explicamos então que por meio desses dados, pudemos provar as hipóteses feitas por alguns alunos antes mesmo de realizar os cálculos.

Para melhor análise referente ao gasto do carregamento de um celular, apresentamos aos alunos uma comparação com o gasto anual de um chuveiro de 4500 W de potência. Esse chuveiro gasta um total de R\$ 26,32 por mês, considerando um banho de 15 minutos ao dia, o que totaliza R\$ 315,90 por ano. Desta forma, os alunos perceberam que o celular realmente gasta pouquíssimo.

Durante a realização de toda a atividade “carregamento da bateria de um celular”, por meio das soluções das duas questões disponibilizadas, o desenvolvimento dos cálculos e as construções das tabelas e gráficos, percebemos um grande avanço no conhecimento dos alunos em relação aos conceitos de função, principalmente, na parte das construções gráficas. No início os alunos apresentavam grandes dificuldades, com relação às variáveis e unidade de medida, por exemplo, não se preocupavam com a escala que usavam, porém, ao final já conseguiam construir os gráficos com mais facilidade e compreensão. Percebemos ainda, que os alunos demonstraram interesse e participação na resolução da atividade, por ser algo presente no cotidiano deles. Devemos ressaltar também que nem todos os alunos apresentavam interesse em aprender os conceitos, então esse *feedback* pode não ser o verdadeiro se considerado toda a turma, porém, os que estavam interessados em aprender apresentaram um excelente desempenho nas atividades.

Nas atividades de Modelagem Matemática o professor é visto como um mediador, deixando os alunos construírem seu próprio conhecimento por meio das hipóteses e discussões nos grupos, ao professor cabe a tarefa de mediar e instigar os alunos na apropriação dos conceitos. Santana e Santana (2009, p. 11) relatam que,

é importante que os estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática tenham um maior contato com os ambientes de aprendizagem que favoreçam o questionamento aberto, para que seja rompido o ciclo, naturalmente estabelecido, em que o educando adepto às “zonas de conforto”, torna-se o futuro professor que induz seus alunos a preferirem trabalhar na “zona de conforto”, evitando assumir um papel mais ativo em sala de aula.

Acreditamos que experiências deste caráter são fundamentais na formação inicial de professores, pois, o que vemos atualmente é o professor sendo o detentor do conhecimento e os alunos apenas se apropriando do que é disponibilizado a eles, sem ir em busca de novos conhecimentos ou realizar questionamentos em relação ao que lhe é ensinado.

Considerações finais

Por meio das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas no período de regência das atividades de estágio do curso de Matemática, podemos concluir que a Modelagem Matemática na Educação Matemática é uma metodologia oportuna e deveria ser mais utilizada no ensino-aprendizagem de Matemática, pois, por meio dela é realizada a articulação entre Matemática e realidade. Entendemos que ao se trabalhar com temas presentes no cotidiano dos alunos, estes se sentem mais motivados e demonstram maior interesse pela Matemática, fazendo com que os conceitos matemáticos tenham significados para eles, proporcionando uma compreensão mais clara desses conceitos e a sua aplicação em diferentes situações vivenciadas.

Diante disso, como docentes devemos fundamentar nossa prática pedagógica de acordo com essa postura que a Modelagem Matemática apresenta, instigando os alunos a conjecturar e levantar hipóteses, buscando soluções para os problemas apresentados, ou seja, incentivando-os a construir seu próprio conhecimento, superando suas dificuldades e desenvolvendo o pensar matematicamente.

Como docentes foi a primeira vez que trabalhamos com a metodologia Modelagem Matemática na prática. Ao optarmos por essa ferramenta, sabíamos da dificuldade, pelo fato de sermos inexperientes com essa metodologia e com a própria sala de aula. Porém, admitimos que essa experiência foi muito proveitosa e vantajosa para nossa carreira acadêmica e profissional. Ressaltamos ainda, que é de suma importância para estudantes na formação inicial poderem experimentar o uso de metodologias diversificadas no período de estágio, pois é o momento de vivenciar experiências inovadoras no ensino, para adquirir segurança em suas práticas futuras.

O uso de Modelagem Matemática como metodologia de ensino foi importante, pois diferente da metodologia tradicional, esta inverte muitos processos metodológicos presentes em uma aula, nos obrigando a estarmos preparados para inúmeros acontecimentos que possivelmente não aconteceriam em uma aula tradicional. Durante o trabalho de preparação das aulas com a Modelagem Matemática surgiram discussões sobre quais perguntas os alunos poderiam realizar em cada parte das atividades propostas. Dessa forma, a Modelagem Matemática nos aproximou dos alunos, pois houve momentos em que nos sentimos novamente como alunos do Ensino Médio, nos colocando no lugar deles para que assim pudéssemos prever o que poderia acontecer em sala de aula.

Portanto, a metodologia Modelagem Matemática na Educação Matemática é uma ferramenta muito útil no ensino-aprendizagem, constatando que é possível abordar a Matemática de uma forma mais dinâmica e motivadora, confrontando a concepção de que a Matemática só pode ser ensinada da forma tradicional. Deste modo, formaremos cidadãos críticos, capazes de transformar o ensino e a sociedade em que se encontram.

Referências

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro - São Paulo, v. 17, n. 22, p.19-35, set. 2004.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001. p.1-14.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p.65-74, jun. 2003.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: Editora, 2004. p. 1-10.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. A modelagem matemática e suas relações com o currículo. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2005, Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: UEFS, 2005. p. 1-9.

MAZUR, Sônia Maria Leite. **As diferentes tendências em educação matemática e o seu significado para o estudo dessa ciência**. 2012. 42 f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2012.

SANT'ANA, Alvino Alves; SANT'ANA, Marilaine de Fraga. Uma experiência com a elaboração de perguntas em Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009, Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009. p. 1-13.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

Uma experiência com função de segundo grau sob a perspectiva da resolução de problemas

Alex Augusto Nunes Machado
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
augusttoalex@gmail.com

Ana Carolina Souza Lisboa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anacslisboa@gmail.com

Cintya Akemi Okawa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
cintyaokawa@gmail.com

Victoria Maria de Oliveira Santos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
vicmaria99@hotmail.com

Resumo: Neste trabalho é relatado o experimento do lançamento de um protótipo de foguete que visava abordar tanto o conceito de função afim quanto de função do segundo grau. A atividade foi realizada com uma turma do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT), projeto de ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), *campus* de Cascavel. Este experimento foi embasado na metodologia de Resolução de Problemas. Foi possível alcançar todos os objetivos, porém a expectativa que tínhamos com relação a participação dos alunos durante a execução da atividade ficou aquém do esperado. De todo modo, foi uma experiência que agregou muito em nossa formação.

Palavras-chave: Resolução de problemas; experimento; função de segundo grau.

1 Introdução

O experimento que será relatado, sobre o lançamento de um protótipo de foguete, visava trabalhar tanto o conceito de função afim quanto de função do segundo grau. Foi desenvolvido no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática. (PROMAT), projeto de ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), *campus* de Cascavel, com alunos de Ensino Médio da rede pública estadual de ensino e alunos da graduação. Para ser realizado, foi necessário partes de dois encontros.

O PROMAT é constituído por 20 encontros, dos quais, os dez primeiros ocorrem no primeiro semestre com conteúdos do Ensino Fundamental e os últimos dez ocorrem no segundo

semestre com conteúdos do Ensino Médio. Possui como um dos objetivos, preparar o aluno para as provas de vestibulares e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Por ser um dos conteúdos mais recorrentes, foi destinado um módulo do projeto com três encontros para as funções. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica, o conteúdo de funções para o Ensino Fundamental engloba a função afim e função quadrática. Assim, foi estruturado o módulo com as noções gerais contidas no primeiro encontro, a função do primeiro grau no segundo encontro e a função do segundo grau no terceiro encontro. O experimento foi aplicado no final da segunda aula, com o objetivo de concluir a ideia de função afim e introduzir a de função quadrática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Resolução de Problemas é apontada como um dos quatro caminhos para se fazer Matemática na sala de aula. Considerando os objetivos do projeto, foi natural a escolha dela como metodologia principal no desenvolvimento das aulas. O experimento também foi embasado nesta metodologia.

O relato está estruturado com o tópico de funções, em que trataremos brevemente a história e a justificativa de seu estudo, o tópico da resolução de problemas, em que será abordado algumas concepções e perspectivas, e o tópico do experimento, em que descreveremos o processo e os resultados.

2 Funções

Segundo o Dicionário Etimológico (2019),

Do latim *functus*, refere-se ao particípio passado do verbo *fungor* que, em português, significa interpretar, isto é, falar sobre aquilo que se conhece. Ação de cumprir um encargo. *Defunctus* é aquele que já não mais fala, cumpriu seu papel de vivo. A palavra *functus* foi usada em matemática no ano de 1697, nas cartas trocadas entre Gottfried Wilhelm Leibniz e Jean Bernoulli: *Commercium Philosophicum et Mathematicum Leibniz et Bernoulli*, vol. I, 1745. Leonhard Euler, em 1734, na revista *Comment Petropol. ad Annes*, rotulou uma função por $f(x)$ quando escreveu: “ $f(x)$ denote functionem quamcunque ipsus x ”, isto é, “ $f(x)$ denota uma função para qualquer x ”.

Na Matemática, embora a palavra tenha aparecido no século XVIII, vale destacar que há registros da noção informal de função desde a antiguidade, segundo Zuffi (2001 apud MARGARINUS, 2013, p. 15) “na Grécia Antiga, a noção de função aparece em estudos ligados a fenômenos naturais, como por exemplo, entre os pitagóricos que estudavam a interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas”.

A função tem grande importância, haja vista o seu potencial para a descrição e previsão de fenômenos. “na antiguidade (...) cientistas e filósofos tentavam compreender a realidade e encontrar métodos e modelos que descrevessem fenômenos naturais” (FERREIRA, 2017, p. 20), processos que ainda continuam acontecendo.

Historicamente, alguns documentos retratam a importância do estudo da função. Como por exemplo, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio trazem que

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2006, p.121)

Sobre a função quadrática, ao que tudo indica, seu estudo teve início com as equações quadráticas (BOYER, 1974 apud CANELLA, 2016). Com o passar dos anos, as investigações a respeito dessa categoria de equações receberam contribuições de vários matemáticos.

A respeito da abordagem do conteúdo de função quadrática, foi possível encontrar em documentos vigentes até pouco tempo atrás, sugestões para motivação através de problemas de aplicação

(...) em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada ($f(x) = a \cdot (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. (BRASIL, 2006, p.81)

Algumas dessas sugestões foram contempladas no experimento que será descrito, como, por exemplo, a utilização de um problema de aplicação que estruturou toda a atividade.

3 Resolução de problemas

A resolução de problemas, estruturada como metodologia de ensino, concebe o problema como um componente estratégico no processo de construção do conhecimento. Eles são formulados com o intuito de auxiliar na elaboração de conceitos, anteriormente à exibição formal destes. Os problemas são relevantes não apenas para se aprender Matemática, mas, também, para tê-los como pontapé inicial a esse aprendizado. (CÂMARA, 2016, p. 17)

Nesta seção será apresentado, de forma sucinta, algumas das concepções e/ou perspectivas que permeiam a resolução de problemas. Isto posto, a questão inicial que se apresenta é: “O que é um problema?”.

De acordo com Vergnaud (1986 apud DANTAS, 2010, p. 27) um problema é “qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver actividades (sic) de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução”. Enquanto que para Boavida et al (2008 apud COSTA, 2015, p. 13) “tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução”. Já, Vila e Callejo (1986 apud DANTAS, 2010, p. 27) definem problema como

a situação que apresenta uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao sujeito que tenta respondê-la porque não dispõe de um algoritmo que relacione aos dados e a incógnita ou os dados e a conclusão e deve, portanto, buscar, investigar, relacionar, implicar seus afetos, etc., para fazer frente a uma situação nova.

Diante disso, é possível notar que essas três formas de conceituar um problema são distintas, porém todas pressupõem uma atitude ativa por parte do resolvido do problema, o aluno, na busca de uma solução para a situação que se apresenta a ele. Assim sendo, estas definições de problemas estão em sintonia com a perspectiva de resolução de problemas proposta por Pozo (1998 apud MACHADO, 2006, p. 30) na qual “a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. (p.9).” É nessa visão que foi enquadrada a atividade do foguete que será descrita.

Ao tratar da resolução de problemas, tão importante quanto às classificações, são suas etapas. De acordo com Vale e Pimentel

(...) existem vários modelos para resolver problemas e várias formas de ensinar a resolver problemas. A maior parte baseiam-se num modelo apresentado por Pólya na sua obra *How to Solve It*. Precisamente por ser um dos modelos com maior influência e continuar, ainda hoje, a ser uma referência na área da educação matemática, o modelo de Pólya tem sido o ponto de partida para o desenvolvimento de outros modelos (VALE & PIMENTEL, 2004 apud COSTA, 2015, p. 18)

Tal modelo proposto por Polya (1995 apud MACHADO, 2006) consiste em quatro etapas: a compreensão do problema; a elaboração de um plano; a execução do plano e o retrospecto.

Existem várias classificações para os problemas. Dentre elas estão os exercícios de reconhecimento, exercícios algoritmos e problemas abertos. Entretanto, o experimento se enquadra nos

Problemas de aplicação

Problemas que requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões. Utilizam com frequência uma ou mais operações e uma ou mais estratégias de resolução. (COSTA, 2015, p.15)

e também nos

Problemas de aparato experimental

Problemas que requerem a utilização de métodos de investigação das ciências experimentais, através do qual o aluno deverá exercer funções de pesquisa. Permitem desenvolver determinadas capacidades, tais como a planificação, a organização e interpretação de dados, medições e contagens (COSTA, 2015, p.16)

Porém, a intenção era que os discentes realizassem uma investigação durante a atividade de modo a conseguir seus próprios dados e formular suas próprias hipóteses. Por isso, o experimento está mais alinhado com os problemas de aparato experimental.

4 O experimento

Planejamos realizar um experimento em que pudéssemos trabalhar tanto o conceito de função afim quanto de função do segundo grau. Dessa forma, decidimos trabalhar com o lançamento de um protótipo de foguete.

O protótipo foi confeccionado conforme as instruções em 13^a Mostra Brasileira de Foguetes: Instruções para as construções dos foguetes (2019).



Figura 1: Protótipo de foguete
Fonte: Acervo dos autores.

Além disso, desenvolvemos o seguinte roteiro para que os alunos seguissem:

Roteiro:

- Anotar os dados que acharem relevantes do lançamento do foguete.
- Repetir o lançamento e as anotações algumas outras vezes.
- Anotar o que foi possível perceber.
- Referente ao primeiro lançamento:
 - (a) Obter a função que descreve a distância em relação ao tempo;
 - (b) Estimar a altura máxima;
 - (c) Obter a distância em que a altura é máxima;
 - (d) Obter a função que descreve a altura em relação à distância.

Para o experimento organizamos algumas carteiras na lateral da sala. A partir da altura das carteiras fizemos demarcações na parede a cada 50 cm, utilizando fita adesiva colorida. Tais marcas seriam necessárias para favorecer a estimativa da altura máxima alcançada pelo projétil.

Disponibilizamos cerca de uma hora para o desenvolvimento da atividade, no final da aula em que trabalhamos função afim. Entregamos o roteiro aos alunos e realizamos alguns lançamentos do protótipo até que a estrutura do ambiente não interferisse no experimento. Anotamos no quadro os dados obtidos: a distância euclidiana entre o ponto de lançamento e o de queda e o tempo de duração do lançamento. Ainda, estimamos com os alunos a altura máxima que o foguete atingiu.

Inicialmente os alunos ficaram empolgados com a atividade, pois era algo que até o momento não havíamos feito, no entanto, conforme tentavam desenvolver o que pedíamos no

roteiro, foram desanimando por não conseguirem resolver de imediato. Além disso, a maioria dos discentes preferiu não realizar o lançamento novamente, apenas um grupo o fez.

Como forma de incentivo, passamos nas mesas fazendo algumas perguntas para que eles tentassem desenvolver ideias. Vários grupos se empenharam, realizaram esboços e tentaram explicar o que haviam pensado sobre o experimento. Alguns alunos perceberam que, aparentemente, o foguete atingia seu ponto máximo mais ou menos na metade do trajeto. Um dos estudantes pensou em utilizar o ângulo em que o foguete foi lançado.

Encorajamo-os a tentar desenvolver as ideias que surgiram na aula durante a semana, para que trouxessem no próximo encontro para socialização e discussão dos resultados.

Para a aula seguinte, com os dados obtidos no lançamento em sala, desenvolvemos os cálculos para obter as funções solicitadas no roteiro, além de encontrar a distância do ponto de lançamento em que o projétil atingiu a altura máxima. Nosso objetivo era escutar o que os alunos teriam para comentar sobre os resultados do experimento e então expor os nossos. A partir dos cálculos, almejávamos apresentar formalmente os conceitos utilizados. Infelizmente, nessa aula poucos alunos que haviam participado do experimento compareceram. Assim, não conseguimos socializar as resoluções dos estudantes, mas de qualquer forma trabalhamos com os vídeos realizados durante o experimento, tendo em vista trazer sentido aos resultados que seriam apresentados.

Iniciando a análise da atividade, com os dados obtidos (tempo: $1,1s$ e distância: $6,5m$) e relembrando a definição de função afim, conseguimos obter a função da distância em relação ao tempo:

$$d(t) \cong 5,91t.$$

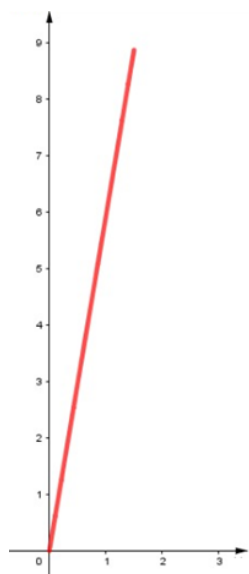


Figura 2: Gráfico da função da distância em relação ao tempo

Fonte: Acervo dos autores.

Para obtermos a distância em que a altura foi máxima ($1,5m$), uma das ideias que

utilizamos foi analisar, através da filmagem, o tempo em que a altura foi máxima, e aplicar na função obtida anteriormente. Conseguimos estimar este tempo, utilizando o PowerPoint, como sendo de 0,55s. E assim,

$$d(0,55) = 5,91.0,55 = 3,25.$$

Antes de prosseguirmos com a exposição dos resultados, passamos uma atividade de reconhecimento de gráfico de funções de segundo grau apresentadas por problemas através da projeção, visando a interação de toda a turma. Apesar de apresentarem certa dificuldade inicialmente, todos participaram e nossos questionamentos os encaminharam para as respostas corretas.

Com o intuito de continuar com as resoluções do roteiro, passamos a definição “Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, quando existem números reais a, b e c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ”, visando resolver o item (d). Em seguida, analisamos o percurso do foguete, realizando o gráfico, e instigamos os estudantes a pensarem sobre que tipo seria a função que o descreve.

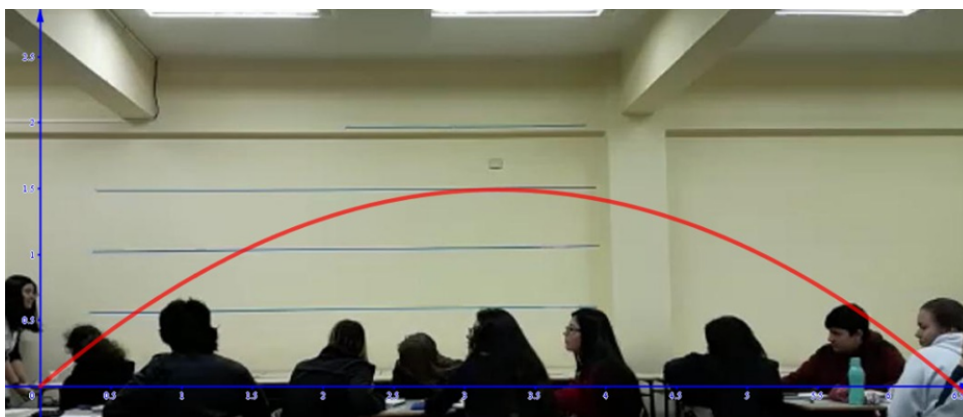


Figura 3: Gráfico da função da altura em relação à distância

Fonte: Acervo dos autores.

Através do gráfico e dos dados já conhecidos,

Distância (m)	Altura (m)
0,00	0,00
3,25	1,50
6,50	0,00

Tabela 1: Dados

Fonte: Acervo dos autores.

montamos e desenvolvemos um sistema utilizando a definição formal, obtendo assim os valores dos coeficientes e consequentemente a lei de formação da função que descreve a altura em relação à distância

$$h(d) = -0,142d^2 + 0,923d.$$

Como queríamos mostrar outras formas de obter tal função, revimos a definição de polinômios e o teorema que o trata da forma fatorada, isto é, em função de suas raízes. Antes de avançar, retomamos ao gráfico e à tabela com os dados, a fim de analisar em quais valores da distância tínhamos valores da altura iguais à zero. Assim, pudemos escrever

$$h(d) = a(d - 0, 0)(d - 6, 5)$$

e desenvolvendo-o, encontramos o valor do coeficiente do termo de maior grau. Utilizando outro ponto conhecido, obtivemos a função já citada.

Ainda com tal experimento, trabalhamos com o conceito das coordenadas do vértice de uma função quadrática. Aqui foi possível, além de encontrar os valores na função em questão, fazer com que os alunos percebessem que a coordenada x do vértice (x_v) está localizada entre as raízes e que é o ponto médio do segmento formado por elas, e também que a imagem de x_v produz a coordenada y do vértice (y_v).

O experimento tinha um grande potencial como ferramenta de ensino e aprendizagem. Apesar disso e de termos conseguido abordar todos os conceitos planejados, não foi tão proveitoso quanto o esperado, devido ao fato da maioria dos alunos não ter participado da fase experimental.

Conclusões

Os alunos que participaram do experimento se mostraram muito interessados na atividade, por ser algo que normalmente não é feito em sala de aula. Mesmo os que estavam com dificuldades tentaram fazer o que era pedido. No entanto, percebemos que os estudantes ainda estavam muito dependentes de nossa ajuda, isto é, não estavam acostumados a tentar desenvolver ideias e respostas por conta própria, serem protagonistas de seu aprendizado.

Além disso, acreditamos que não foi proveitoso para os alunos a atividade dividida em dois encontros, por causa da falta de assiduidade dos discentes, uma vez que apenas três deles estavam presentes nos dois encontros, afetando a socialização e a correção, que ficaram desinteressantes para a maioria, levando a pouca participação.

Mesmo que a experiência não tenha atingido as expectativas esperadas, julgamos a atividade realizada como uma forma válida de se trabalhar com funções afim e quadrática, visto que ela se baseia nas teorias apontadas neste relato, além de conseguir abranger todo o conteúdo que pretendíamos trabalhar. Ainda com o experimento foi possível alcançar todos os objetivos pré-estabelecidos.

Também, vale comentar sobre a utilização da Resolução de Problemas em várias de nossas aulas, em que tivemos maior participação por parte dos discentes do que naquelas em que não trabalhamos com tal metodologia.

Referências

- 13^a Mostra Brasileira de Foguetes: Instruções para as construções dos foguetes. Instruções para as construções dos foguetes. 2019. Disponível em:
http://www.oba.org.br/sisglob/sisglob_arquivos/ATIVIDADES%20PRATICAS%20DA%2013%20MOBFOG%20DE%202019.pdf. Acesso em: 05 maio 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000a. p. 142.
- BRASIL, Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.
- BUTTS, Thomas. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.. A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48. Tradução de: Hygino H. Domingues; Olga Corbo.
- CÂMARA, Rivelino de Souza. Resolução de problemas: Uma proposta metodológica. 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em:
http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/22129/1/2016_dis_rscamara.pdf. Acesso em: 27 jun. 2019.
- CANELLA, Cristiane Moura da Silva Bronsato. Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do Ensino Médio. 2016. 168 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016. Disponível em:
<https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2200/1/cristianemouradasilvabronsatocanella.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2019.
- COSTA, Ana Cristina Caixeirinho da. A resolução de problemas matemáticos no 4.º ano de escolaridade em contexto de trabalho de grupo. 2015. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto Politécnico de Setúbal Escola Superior, Setúbal, 2015. Disponível em:
<https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/8586/1/A%20RESOLUC%cc%a7A%cc%830%20DE%20PROBLEMAS%20MATEMA>. Acesso em: 28 jun. 2019.
- DANTAS, Jesica Barbosa. A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA COM ALUNOS DE EJA. 2010. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em:
https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/4872/1/arquivo8497_1.pdf. Acesso em: 28 jun. 2019.
- DICIONÁRIO Etimológico Etimologia e Origem das Palavras. Disponível em:
<https://www.dicionarioetimologico.com.br/funcao/>. Acesso em: 28 jun. 2019.
- FERREIRA, Raul Maroja. Proposta de aplicação no ensino de funções na educação básica. 2017. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília,

2017. Disponível em:

http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/30995/1/2017_RaulMarojaFerreira.pdf.

Acesso em: 28 jun. 2019.

MACHADO, Elisa Spode. Modelagem matemática e resolução de problemas. 2006. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006. Disponível em:

<http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/2950>. Acesso em: 28 jun. 2019.

MAGARINUS, Renata. Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Disponível em:

<https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10933/MAGARINUS%2C%20RENATA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>}. Acesso em: 28 jun. 2019.

PARANÁ. Diretrizes curriculares da educação básica: Matemática. 2008. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf}. Acesso em: 01 abr. 2019.

Juros continuamente compostos: uma introdução

Kaio Arlei Strelow¹

Unioeste - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Campus de Cascavel)

kaio.strelow@gmail.com

Fabiana Magda Garcia Papani

Unioeste - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Campus de Cascavel)

fgarciapapani@gmail.com

Resumo: Os métodos de capitalização simples e composto indicam como será o montante ao final de um determinado período. Por sua vez, a capitalização continuamente composta, como o nome diz, indica a capitalização em tempo contínuo, isto é, a cada instante infinitesimal. Nesse sentido, o trabalho explana sobre esse modo de capitalização e, ao final, mostra um exemplo.

Palavras-chave: Matemática Financeira; O Número de Euler; Identidade de Euler.

1 Introdução

A impaciência pelo consumo imediato ou a ideia de postergar o consumo remetem ao ajuste do dinheiro ao longo do tempo. Se a constituição genética do ser humano, o período do ciclo de vida em que ele está inserido, ou ainda, fatores ambientais podem alterar a percepção das pessoas quanto a antecipar ou retardar valores de forma eficiente (GIANETTI, 2012), questiona-se: como realizar escolhas intertemporais?

Se há dúvidas sobre como enfrentar as incertezas diante das escolhas, uma é a certeza: o conhecimento se faz peça-chave para melhorar a relação com o dinheiro e, principalmente, com o tempo. Nesse sentido, a Matemática, ao estudar essas relações por meio de seu ferramental, auxilia na tomada de decisões e, conseqüentemente, diminui as angústias presentes na vida das pessoas.

É preciso entender a natureza e o propósito de alguma coisa antes que se possa fazê-la, cuidar dela ou repará-la adequadamente (Guthrie apud Gianetti, 2005).

Assim, este trabalho apresenta uma aproximação inicial sobre o conceito de *juros continuamente compostos*, uma relação infinitesimal entre tempo e dinheiro. Nas transações bancárias cotidianas, esse tipo de juros não é usado, mas seu conceito pode ser aplicado ao cálculo de depreciação, rentabilidade de carteiras com ações cujo pagamento de rendimentos se dá em intervalos curtos e outros fluxos de caixa distribuídos uniformemente no tempo.

¹ Acadêmico do Curso de Ciências Econômicas; Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME/OBMEP.

Dessa forma, propõe-se neste artigo apresentar noções sobre o número e a identidade de Euler, além de conceitos básicos da Matemática Financeira para, então, compreender o funcionamento dos juros continuamente compostos e resolver um problema, que fomentou o interesse dos autores pelo tema, adaptado da primeira edição da OBECON - Olimpíada Brasileira de Economia. No sentido de realizar tal proposta, pautou-se em pesquisa bibliográfica que, segundo Gil (2008, p. 50), “é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

Para tanto, divide-se este trabalho em quatro partes, incluindo esta introdução. Na segunda seção, caracterizam-se: algumas noções de Cálculo, além do número de Euler e a Identidade de Euler (sendo que esta última subseção é importante para a compreensão do exemplo apresentado ao final); bem como a definição e o objetivo da Matemática Financeira, os conceitos básicos relativos a juros, porcentagem, capital, montante, capitalização simples e composta. Em seguida, abordar-se-á o funcionamento e a justificativa para a existência dos juros continuamente compostos, trazendo também um exemplo. Ao final, são apresentadas as considerações finais do estudo realizadas até o momento.

2 Fundamentação teórica

Com o objetivo de dar subsídios teóricos ao conteúdo deste artigo, esta seção lista definições importantes, principalmente da Matemática Financeira e do Cálculo Diferencial, com base em Assaf-Neto (2012), Chiang & Wainwright (2006), Rousseau & Saint-Aubin (2015), Simon & Blume (1994), Stewart (2013), além de outros autores citados ao longo do texto.

2.1 Preliminares

Pressupõe-se, como requisito para compreensão de alguns assuntos aqui tratados, o prévio conhecimento principalmente sobre Cálculo Diferencial. Para uma leitura sobre limites, continuidades, derivadas, séries, entre outros; recomenda-se Swokowski (1983), Leithold (1994), Simon & Blume (1994) e Stewart (2013).

Lema 1. *Se f for contínua em b e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Busca-se um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon.$$

Uma vez que f é contínua em b , tem-se

$$\lim_{y \rightarrow b} f(y) = f(b),$$

logo, existe $\delta_1 > 0$ tal que se

$$0 < |y - b| < \delta_1 \text{ então } |f(y) - f(b)| < \varepsilon.$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, há $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |g(x) - b| < \delta_1.$$

Assim, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, tem-se $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b).$$

□

Lema 2. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Prova. Sendo $f(x) = \ln x$, decorre que $f'(1) = 1$. Considerando também a definição de derivada, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

É possível, ainda, escrever, considerando o Lema 1 e que a função exponencial é contínua:

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Portanto:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}. \quad (1)$$

Tomando $n = \frac{1}{x}$, o valor de n tende a ∞ quando x tende a 0, de modo que e pode ser escrito como

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2)$$

□

Lema 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

Prova. Tomando $m = \frac{n}{k}$, o valor de m tende a ∞ quando n tende a infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^k = e^k$$

□

Lema 4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Prova.

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

Tomando $m = \frac{1}{h}$; quando $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Assim:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{m} \right)^m = \ln \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{m} \right)^m = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

□

Lema 5. $(e^x)' = e^x$.

Prova. Tomando $f(x) = \ln e^x = x$, calcula-se as derivadas de ambos os lados e tem-se

$$(\ln e^x)' = \frac{1}{e^x} (e^x)' = 1.$$

Então,

$$(e^x)' = e^x.$$

□

Série de Taylor

Definição 6. Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo 0 como um ponto interior. Então, a série de Taylor gerada por f em $x = 0$ é

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{(1!)} + \frac{f''(0)x^2}{(2!)} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{(3!)} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{(4!)} + \dots. \quad (3)$$

Exemplo 1. Sendo $f(x) = \sin x$, tem-se que as derivadas de ordem $n = 4k + r$ (tal que k e $r \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq 3$) da função $f(x)$ são dadas por:

$$\sin^{(4k+r)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } r = 0 \\ \cos x, & \text{se } r = 1 \\ -\sin x, & \text{se } r = 2 \\ -\cos x, & \text{se } r = 3. \end{cases}$$

Nota-se que as derivadas de ordem par, no ponto $x = 0$, de $f(x)$ são nulas, enquanto que as de ordem ímpar são -1 ou 1. Desse modo, a série de Taylor de $f(x)$ em $x = 0$ é

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Exemplo 2. Sendo $g(x) = \cos x$. Nota-se que as derivadas de ordem ímpar de $g(x)$, avaliadas em $x = 0$, são nulas, enquanto que as de ordem par são -1 ou 1. Desse modo, a série de Taylor de $g(x)$ em $x = 0$ é

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots.$$

Para uma função arbitrária e para qualquer ponto x_0 em que for expandida a função, a função será $P_n + R_n$, em que P_n é o polinômio da definição 6 e, de acordo com a forma de Lagrange para o resto,

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Assim, a expansão de uma função $f(x)$ por série de Taylor aproxima qualquer função por uma função polinomial nas vizinhanças do ponto $x = x_0$.

O número de Euler

O número de Euler é denotado como e ; possivelmente, porque é a primeira letra da palavra *exponencial*. Tal notação foi dada pelo matemático Leonhard Euler em 1727, de quem o número recebeu o nome (STEWART, 2013). É um número irracional, base dos logaritmos naturais, cuja aproximação é 2,7182..., conforme mostra-se a seguir:

Por meio do cálculo da série de Taylor da função $f(x) = e^x$ e pelo Lema 5, tem-se:

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^x = f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n. \end{aligned}$$

O resto, R_n , pode ser escrito como

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Como $(n+1)!$ cresce mais rapidamente que x^{n+1} quando n cresce, $R_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, de modo que a série de Taylor converge e e^x pode ser escrito como uma série convergente finita:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (4)$$

Quando $x = 1$,

$$\begin{aligned} e^1 = e &\simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \\ &\simeq 2 + 0,5 + 0,16666667 + 0,04166667 + 0,00833333 + 0,00138889 + 0,000198413 \simeq 2,7182 \end{aligned}$$

A identidade de Euler

A identidade de Euler é considerada uma das mais belas equações já escritas. Isso porque se utiliza de números muito proeminentes na Matemática: π , e , i , 0 e 1.

A identidade pode ser escrita como

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (5)$$

Para verificar a validade destas igualdades, toma-se e^x , conforme a equação 4.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right).$$

Substituindo x por iz , tem-se:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots \\ e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ e^{iz} &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^8}{8!}\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Contudo, essas expressões são conhecidas, conforme exemplos 1 e 2, de modo que $e^{iz} = \cos z + i\sin z$. No caso específico de $z = \pi$, tem-se $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$. Portanto,

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (6)$$

2.2 Matemática Financeira e Juros

A Matemática Financeira está presente no cotidiano das pessoas em diversas situações: na compra de um eletrodoméstico ou de um automóvel, no financiamento de um imóvel, ao se fazer uma aplicação ou investimento, no cálculo da depreciação de ativos fixos. Isso porque, segundo Puccini (2011, p. 11), a Matemática Financeira é “um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo; para isso, cria-se modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo”. Corroborando com essa definição, Leonardo (2013) diz que o conhecimento da Matemática Financeira e suas operações como cálculo de empréstimo, descontos e taxa de juros é fundamental para o pleno exercício da cidadania e pode auxiliar a vida do consumidor, por ser uma ferramenta a mais para subsidiar a tomada de decisão. Dana e Pires (2008, p. 8) concluem que “a importância da Matemática está justamente em ajudar a solucionar problemas da vida cotidiana”.

O estudo da Matemática Financeira parte do pressuposto de que a mesma quantia hoje e amanhã, ou agora e no próximo instante, tem valores diferentes: postergar o recebimento de dinheiro envolve um sacrifício; já adquirir um produto agora sem dispor de recursos suficientes, leva a pagar um custo extra mais a frente. A esse custo extra ou a recompensa pelo sacrifício, denomina-se juros (ASSAF NETO, 2012; GIANETTI, 2012). Nesse sentido, as pessoas tomam a decisão de pagar juros pela impaciência, em uma escolha intertemporal, pressupondo que as mercadorias presentes são preferidas em relação às mercadorias futuras (FISCHER, 1930).

Ainda, Leonardo (2013) define juros como a remuneração recebida pelo empréstimo de capital - valor em dinheiro - a uma instituição financeira ou o valor que se paga a tal instituição no caso de empréstimo.

A origem dos juros é dada por uma operação financeira que é a ação econômica pelo qual um agente possuidor de capital (C) - denominado credor - transfere esse capital a outro agente econômico - tomador - mediante condições previamente estabelecidas, como a remuneração dada ao credor, os prazos e formas de pagamento do montante e a garantia deste pagamento (PUC-CINI, 2011).

Nesse sentido, capital, também chamado de valor presente, é o valor no momento atual. Conforme o tempo passa, esse tem o valor alterado, formando o montante ou valor futuro, que é o capital inicial acrescido do rendimento obtido durante um determinado período, juros. Assim, tem-se:

$$\text{Montante} = \text{Capital} + \text{Juros} \quad (M=C+J).$$

O montante varia de acordo com a taxa percentual de juros, o tempo do empréstimo ou aplicação e o regime de capitalização, que pode ser simples, composto ou, até mesmo, continuamente composto. Quanto às taxas de juros, são dadas geralmente em porcentagem, isto é, em termos de partes consideradas de um total de 100 partes. É uma maneira usada para indicar a razão entre um número real p e o número 100, indicado por $p\%$. A taxa percentual pode, ainda, ser apresentada de forma decimal, com vírgula; e é dada geralmente ao dia (a.d), ao mês (a.m.) ou ao ano (a.a.), dependendo do tempo envolvido na transação.

Dependendo da forma que essa taxa de juros incide sobre o capital, tem-se as formas de capitalização distintas, como segue.

Juros Simples e Compostos

O regime de capitalização simples é aquele no qual os juros incidem apenas sobre o capital inicial (LEONARDO, 2013). Nas operações comerciais práticas, isso não é utilizado, mas ajuda compreender o conceito de juros compostos.

Exemplo 3. Se considerarmos um capital de R\$ 200,00 e uma taxa de juros de 6% a.a., a juros simples, temos:

Tempo	Montante
Inicial	200
1	$200 + (200 \times 0,06) = 200 + 12 = 212$
2	$200 + (200 \times 0,06) + (200 \times 0,06) = 200(1 + 2 \times 0,06) = 224$
3	$200 + (200 \times 0,06) + (200 \times 0,06) + (200 \times 0,06) = 200(1 + 3 \times 0,06) = 236$
$\vdots$	$\vdots$
t	$200(1 + t \times 0,06)$

Assim, generalizando, se for considerado um capital C e uma taxa de juros de $r\%$, a juros simples, tem-se:

Tempo	Montante
Inicial	C
1	$C+Cr=C(1+r)$
2	$C+Cr+Cr=C(1+r+r)=C(1+2r)$
3	$C+Cr+Cr+Cr=C(1+r+r+r)=C(1+3r)$
$\vdots$	$\vdots$
t	$C(1+rt)$

Definição 7. Para qualquer período t , o juro no regime simples é dado pelo produto do capital C pela taxa de juros, r , e pelo período de tempo, t , envolvidos na transação, isto é,

$$J = M - C = Cr t.$$

Já no regime composto de capitalização, os juros obtidos a cada período são incorporados ao capital inicial. Em outras palavras, a taxa de juros incide sobre o valor do início do período, que é igual ao montante do período anterior. Popularmente, chama-se isso de “juro sobre juro” e é o sistema de capitalização utilizado nas operações financeiras cotidianas (ASSAF NETTO, 2012; LEONARDO, 2013).

Exemplo 4. Partindo do exemplo do tópico anterior, mas com o regime de juros compostos, tem-se:

Tempo	Exemplo	Generalização
Inicial	200	C
1	$200+0,06 \times 200=200(1+0,06)=212$	$M_1 = C + Cr = C(1 + r)$
2	$200(1 + 0,06)(1 + 0,06)=200(1 + 0,06)^2 = 224,72$	$M_2 = M_1(1 + r) = C(1 + r)^2$
3	$200(1 + 0,06)(1 + 0,06)(1 + 0,06)=200(1 + 0,06)^3 \simeq 238,20$	$M_3 = M_2(1 + r) = C(1 + r)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$200(1 + 0,06)^t$	$M = C(1 + r)^t$

Definição 8. Seja um regime de capitalização composto, um capital C a uma taxa de juros r , depois de t períodos, formará um montante $M = C(1 + r)^t$.

3 Resultados e discussões

3.1 Juros continuamente compostos

Se no início do período, foi emprestado um capital C em unidades monetárias a uma taxa de juros anual r , com capitalização composta, e a dívida não for paga, ao final de um ano, a dívida é de $C(1+r)$ unidades monetárias. A cada ano, a dívida é multiplicada por $(1+r)$, de modo que após t anos, tem-se um montante igual a $C(1 + r)^t$, conforme visto anteriormente.

Se esse juro for cobrado semestralmente, ao final de cada seis meses, são acrescidos $\frac{r}{2}$ do juro anual. Assim, passado meio ano do momento do empréstimo, a dívida é de $C + C\frac{r}{2}$ unidades monetárias; ao passar de um ano, é de $C(1 + \frac{r}{2})^2$ unidades monetárias; e, ao passar de t anos, o montante terá crescido e atingido $C(1 + \frac{r}{2})^{2t}$ unidades de moeda.

Contudo, pode ser que esses juros sejam cobrados trimestralmente, mensalmente, semanalmente ou diariamente. Se o juro for computado n vezes durante o ano, tem-se que o montante

ao final de um período será de $C + C\frac{r}{n}$ unidades monetárias; e, após t anos, o montante será de $C(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ unidades de moeda.

Ademais, esse juro pode ser cobrado a cada segundo, a cada milésimo de segundo ou, ainda, *continuamente*. Nesse caso, qual será o fator utilizado para multiplicar o capital para encontrar o montante? Na linguagem matemática, a busca é pelo limite de $C(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ quando n tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \quad (7)$$

Tomando $\gamma = \frac{n}{r}$, pode-se escrever a equação 7 da seguinte forma:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma rt} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C \left(\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma}\right)^{rt}. \quad (8)$$

Ora, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma}$ é conhecido. Portanto, pela equação 2, pode-se escrever:

$$Ce^{rt}. \quad (9)$$

Definição 9. Seja um regime de capitalização continuamente composta, um capital C a uma taxa de juros r , depois de t períodos, formará um montante $M = Ce^{rt}$.

Desse modo, a capitalização contínua se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos - intervalo de tempo infinitesimal. Ela se dá em todo fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não em um instante apenas. Nesse sentido, ela se difere das formas de capitalização apresentadas anteriormente, uma vez que elas são discretas, isto é, os juros são formados somente ao final de cada período de capitalização.

Embora o juro continuamente composto não esteja presente no cotidiano das pessoas, no sentido de não ser possível, por exemplo, emprestar ou aplicar dinheiro capitalizado nesse regime, a preocupação com o contínuo é importante. Em um mundo cada vez mais conectado e dinâmico, o “contínuo” está mais presente na vida das pessoas que se pode imaginar.

3.2 Exemplos

Exemplo 5. Tomando os dados dos exemplos 3 e 4 no regime de capitalização continuamente composto, o montante se comportaria da seguinte forma ao longo do tempo:

$$M_1 = 200e^{(0,06)(1)} = 200e^{0,06} \cong R\$212,37.$$

$$M_2 = 200e^{(0,06)(2)} = 200e^{0,12} \cong R\$225,50.$$

$$M_3 = 200e^{(0,06)(3)} = 200e^{0,18} \cong R\$239,44.$$

Logo, ao final de 3 anos, o montante, no regime de capitalização continuamente composta, será de R\$ 239,44.

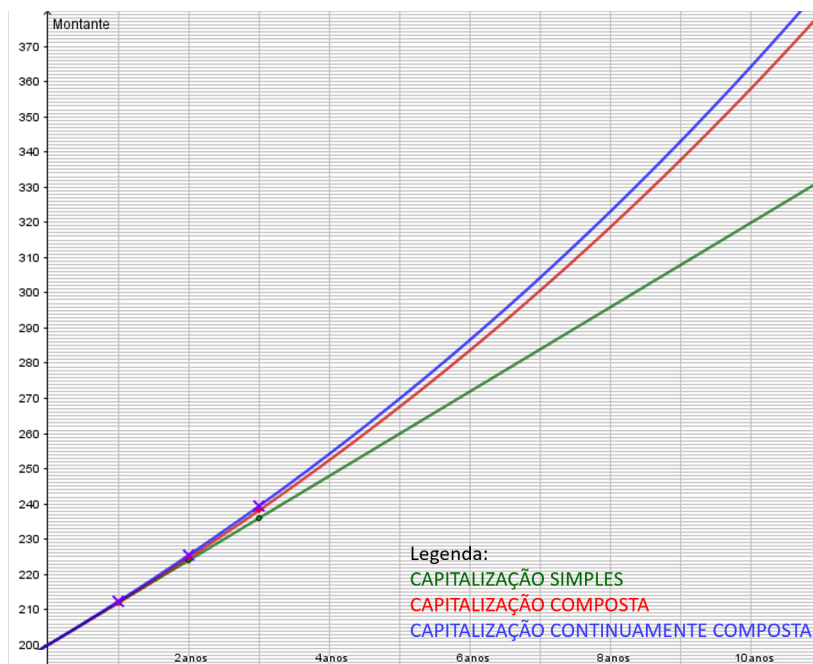


Figura 1: Comparação entre o montante nos três regimes de capitalização.

Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

A Figura 1 mostra o comportamento do crescimento do montante em ambos os regimes: simples, composto e continuamente composto. A capitalização simples gera um crescimento linear, enquanto as capitalizações composta e continuamente composta promove um crescimento exponencial no montante ao longo do tempo. Verifica-se, ainda, que o regime de capitalização contínua é aquele que gera o maior crescimento no capital.

O próximo exemplo foi baseado em uma questão da primeira fase da primeira edição da OBECON - Olimpíada Brasileira de Economia, realizada em 2018 (OBECON, 2018). Além de se utilizar da capitalização continuamente composta, é interessante notar o uso de uma taxa de juros pertencente ao conjunto dos números complexos. Destaca-se que essa foi a questão que despertou o interesse pelo assunto.

Exemplo 6. Você tem uma dívida de R\$ 1,00 em um banco a uma taxa de juros anual i (unidade imaginária) em regime de juros compostos, capitalizados continuamente. Quanto tempo leva para o banco lhe pagar R\$ 1,00?

Pelo enunciado, tem-se um capital $C = -R\$ 1,00$, uma taxa de juros $r = i\%$ a.a. e o montante, após certo período de tempo t , que deve ser encontrado, é de $M = R\$ 1,00$. Assim:

$$1 = -1e^{it} \Rightarrow -1 = e^{it}.$$

A Identidade de Euler diz que $-1 = e^{i\pi}$, de tal modo que

$$e^{it} = e^{i\pi} \Rightarrow t = \pi.$$

Assim, levaria π anos para o banco lhe pagar R\$ 1,00.

Conclusões

Este trabalho apresentou conceitos de Matemática Financeira, no que se refere a juros e capitalização, e características do número e , com abordagem também à Identidade de Euler. Seguindo os objetivos propostos, o artigo destacou o funcionamento da capitalização continuamente composta e a sua relação com o número e .

Ademais, os exemplos puderam dar significado às diferenças existentes entre os diferentes regimes de capitalização. Em especial, o último exemplo relacionou os juros continuamente compostos com a Identidade de Euler.

De modo geral, chama-se a atenção para o fato de que, apesar de o regime de capitalização continuamente composto não ser utilizado no dia-a-dia das pessoas, nas transações bancárias, por exemplo, ele está relacionado a fenômenos importantes como a depreciação dos ativos de uma empresa. Nesse sentido, é importante seu estudo pois, em termos de ser condizente com a realidade, esse regime de capitalização é mais fiel que o regime de capitalização simples.

Referências

- ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.
- CHIANG, A. C. ; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- FISCHER, I. **The Theory of Interest**: As determined by impatience to spend income and opportunity to invest it. New York: Macmillan Company, 1930.
- GIANETTI, E. **Autoengano**. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.
- **O valor do amanhã**: ensaio sobre a natureza dos juros. São Paulo: Companhia das Letras, 2012.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, vol. I. São Paulo: Editora Harbra, 1994.
- LEONARDO, F. M. (Ed.). **Conexões com a Matemática**: 3. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.
- OBECON: OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ECONOMIA. **Obecon Fase I [Prova]**. Comissão Organizadora da OBECON (COOBECON), 2018. Disponível em <http://www.obecon.org/>. Acesso em 23 ago. 2019.
- DANA, S.; PIRES; M. C. **10 × sem juros**: saiba como se proteger das armadilhas do crediário (Coleção Letras & Lucros). São Paulo: Editora Saraiva, 2008.
- PUCCINI, E. C. **Matemática Financeira e Análise de Investimentos**. Florianópolis:

Departamento de Ciências da Administração / UFSC, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**, volume I, 7a. edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SIMON, C.; BLUME, L. **Mathematics for economists**. New York: W. W. Norton e Company, Inc, 1994.

SWOKOSKI, E. A. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1983.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. **Matemática e Atualidade: Volume 1**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. 326 p. (Coleção PROFMAT).

O teorema do valor médio para derivada fracionária de Caputo

Alex Augusto Nunes Machado¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - *Campus* Cascavel
augusttoalex@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - *Campus* Cascavel
smguzzo@gmail.com

Resumo: Este trabalho visa a apresentação do teorema do valor médio para derivadas em sua versão fracionária. Para isso, faremos uma breve introdução do que vem a ser, e como se desenvolveu, o cálculo fracionário, seguindo com a apresentação dos conceitos básicos para o estudo desse campo matemático. Em seguida definiremos as noções de integral de Riemann-Liouville e derivada de Caputo, apresentando algumas de suas principais consequências respectivamente. Na sequência, apresentaremos os teoremas do valor médio para integral fracionária e derivada fracionária.

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Derivada fracionária; Teorema do valor médio.

1 Introdução

O cálculo de ordem arbitrária, segundo Oliveira (2010), está compreendido no ramo da Matemática denominado análise matemática, e consiste na generalização do cálculo de ordem inteira, isto é, com n da notação de derivadas e integrais de ordem superior podendo ser real ou complexo, embora, tradicionalmente tenha sido utilizada a terminologia “cálculo fracionário” como sinônima de cálculo de ordem arbitrária (ou cálculo de ordem generalizada), rigorosamente falando o mais correto seria utilizar apenas estas duas últimas, tendo em vista que o conjunto dos reais não é composto somente por “frações”. Todavia, uma vez destacado este fato, por motivos históricos, neste trabalho utilizaremos as três terminologias como sinônimas.

Um dos principais benefícios do cálculo de ordem arbitrária é o fato de que ele pode ser considerado:

[...] um superconjunto do cálculo de ordem inteira. Deste modo, o cálculo fracionário tem potencial para realizar o que o cálculo de ordem inteira não realiza. Muitos especialistas no assunto afirmam que muitos dos grandes desenvolvimentos futuros virão das aplicações de cálculo fracionário para diferentes campos. (OLIVEIRA, 2010, p. 36)

Percebamos então que assim como o cálculo de ordem inteira, os principais objetos de estudo são as funções, porém, a investigação e aplicação das integrais e derivadas de ordens

¹O autor agradece a Fundação Araucária pelo apoio financeiro concedido por meio de bolsa de iniciação científica.

arbitrárias em ciências exatas, naturais, sociais, tecnológicas e engenharias também faz parte do escopo desse ramo da Matemática.

O cálculo de ordem generalizada tem sua alvorada, conforme Oliveira (2018), com as trocas de correspondências entre Gottfried Wilhelm Leibniz e Guillaume François Antonie L'Hôpital ocorrida em 1695. Em uma destas mensagens, após Leibniz perguntar a L'Hôpital se poderia a derivada de ordem inteira ser generalizada a uma derivada com ordem arbitrária, L'Hôpital responde indagando sobre qual seria o significado de

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) \equiv \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx}y(x),$$

que em resposta, Leibniz assegura à L'Hôpital que para $y(x) = x$, a igualdade

$$d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{ds} : x,$$

aparentemente um paradoxo, algum dia gerará muitas consequências frutíferas. Notemos que a igualdade anterior está escrita em notação de sua época, e portanto, neste caso é uma notação desatualizada, consequentemente sendo difícil afirmar com precisão seu significado.

Isto posto, a partir de 1695, o cálculo fracionário recebeu contribuições de vários outros matemáticos. Segundo Oliveira (2010), por mais que outros pesquisadores tivessem feito contribuições para o assunto muito mais cedo, como por exemplo Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange, os primeiros estudos mais ou menos sistemáticos realizados em cálculo fracionário parecem terem sido feitos no início e meio do século XIX por Joseph Liouville, Georg Friedrich Bernhard Riemann e Hjalmar Joseph Holmgren. Ao que tudo indica, foi Liouville quem fez o primeiro estudo importante para dar uma definição lógica de uma derivada fracionária, já Riemann em 1847 enquanto aluno de graduação, escreveu um artigo no qual deu a definição, cuja modificação é agora conhecida como a integral de Riemann-Liouville e o primeiro trabalho que levou ao que agora chamamos definição de Riemann-Liouville para a derivada fracionária parece ser o documento escrito por Nikolay Yakovlevich Sonin, em 1869.

Além dos já citados, houveram outras mentes que também contribuíram na construção do cálculo de ordem arbitrária nesse século, conforme mostram Camargo (2015), Oliveira (2018) e Oliveira (2010), nomes como Jean Baptista Joseph Fourier, Pierre Simon de Laplace, Aleksey Vasilievich Letnikov, Silvestre François Lacroix e Pierre Alphonse Laurent, sendo que este último, no ano de 1884, publica *Sur le calcul des dérivées à indices quelconques* que é conhecida como um marco inicial para o moderno desenvolvimento do cálculo fracionário. Isto posto, em resumo, até o fim do século XIX a construção do cálculo fracionário se concentrou nas partes teóricas da Matemática, sem grandes aplicações em outros campos. Já em 1969, Michele Caputo propõe uma nova definição para derivada de ordem arbitrária, porém em 1992-1993 publica o livro *Lectures on Seismology and Rheological Tectonics*, onde é proposta uma importante mudança na definição da derivada fracionária.

Vale destacar que durante todo esse processo de construção desse novo ramo da Matemática,

[...] foram formuladas mais de uma definição de integral e também de derivada de ordem arbitrária, às vezes não equivalentes, na tentativa de justificar a solução de Leibniz. [...] A partir destas definições vários autores mostraram que o cálculo de ordem arbitrária oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo de ordem inteira. (OLIVEIRA, 2010, p. 3).

Isto posto, no que diz respeito a integração de ordem arbitrária, seguiremos a proposta de definição conhecida por integral fracionária de Riemann-Liouville. Já para a derivada, adotaremos a formulação comumente chamada de derivada fracionária de Caputo. Por fim, no que relaciona-se aos teoremas do valor médio para integrais e derivadas fracionárias (TVMF's), optamos por seguir as ideias apresentadas em Diethelm (2017).

2 Conceitos preliminares

Antes de iniciarmos com o cálculo de ordem arbitrária propriamente dito, faz-se necessário o conhecimento de alguns conceitos que serão de vital importância para o restante do trabalho. Sendo assim, nesta seção apresentaremos a função Gama e o conceito de integral de ordem inteira.

A definição da função Gama em termos de integral, como adotaremos nesse texto, é atribuída a Leonhard Euler. Originalmente, como mostra Oliveira (2010), Euler a propôs como sendo uma função complexa de variável complexa. Todavia, aqui restringiremos o domínio da função Gama para os reais positivos e o contradomínio para os reais.

Definição 1. Define-se a *função Gama* como sendo a função $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

Uma das propriedades mais importantes dessa função é o teorema que enunciaremos e provaremos a seguir, é devido a ele que a função Gama é conhecida como uma generalização para o fatorial.

Teorema 2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Prova. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, assim

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{(x+1-1)} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt. \quad (i)$$

Tome $u = t^x$ e $dv = e^{-t} dt$, assim $du = xt^{(x-1)} dt$ e $v = -e^{-t}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^b t^x e^{-t} dt &= -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^b - \int_0^b -e^{-t} x t^{(x-1)} dt = -b^x e^{-b} + x \int_0^b e^{-t} t^{(x-1)} dt \\ &= \frac{-b^x}{e^b} + x \int_0^b t^{(x-1)} e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (ii)$$

De (i) e (ii) obtemos que

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-b^x}{e^b} + x \int_0^b t^{(x-1)} e^{-t} dt \right]$$

$$= 0 + x \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^{(x-1)} e^{-t} dt = x \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

□

Diante disso, segue como corolário que quando $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, a demonstração desse fato fica a cargo do leitor.

A seguir apresentaremos o operador integral, bem como provaremos uma importante proposição relativa a esse operador, deste modo teremos em mãos material suficiente para prosseguirmos com o cálculo fracionário propriamente dito.

Definição 3. Seja f uma função integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [a, b]$. O operador integral de f em $[a, b]$ é denotado por $(Jf)(t)$ ou $J(f(t))$, isto é,

$$(Jf)(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Diante disso, note que para $t, t_1 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$(J(Jf))(t) = \int_a^t (Jf)(t_1) dt_1 = \int_a^t \int_a^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1,$$

desde que as integrais envolvidas existam em $[a, b]$. Quando tal fato ocorre denotamos $(J(Jf))(t)$ por $(J^{(2)}f)(t)$ e dizemos que a integral é de ordem 2. Seguindo com esse raciocínio n vezes obtêm-se a seguinte igualdade $(J^{(n)}f)(t)$

$$(J^{(n)}f)(t) = \int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-2}} \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1,$$

desde que as integrais envolvidas existam em $[a, b]$.

Observação 1. Assim como no cálculo clássico convencionou-se adotar $\frac{d^0 f}{dt^0}(t) = f(t)$, ver Leithold (1994), procederemos de modo similar com a notação de integral, isto é, neste texto adotaremos $(J^{(0)}f)(t) = f(t)$.

O teorema seguinte é conhecido como *Teorema de Cauchy para integrais Repetidas*.

Teorema 4. Se f é uma função integrável n vezes em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$(J^{(n)}f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Prova. Para demonstrar esse teorema, utilizaremos indução finita sobre $\mathbb{N}^*$. Tomemos então $n = 1$,

$$(J^{(1)}f)(t) = (Jf)(t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(1-1)} f(s) ds = 1 \cdot \int_a^t (t-s)^0 f(s) ds = \int_a^t f(s) ds.$$

Suponhamos que a igualdade é válida para $n-1$, isto é,

$$(J^{(n-1)}f)(t) = \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1-1)} f(s) ds.$$

Assim, para n obteremos

$$\begin{aligned}(J^{(n)}f)(t) &= (J(J^{(n-1)}f))(t) = \int_a^t (J^{(n-1)}f)(s) ds \\ &= \int_a^t \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau) d\tau ds.\end{aligned}$$

Note que $a \leq s \leq t$ e $a \leq \tau \leq s$, portanto, para mudarmos a ordem dos limites de integração sem mudar a região de integração, s e τ deverão ser tais que

$$\tau \leq s \leq t \quad \text{e} \quad a \leq \tau \leq t.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_\tau^t (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (s-\tau)^{(n-1-1)} ds d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \left[\frac{(s-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)} \right]_{s=\tau}^t d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)} d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)! \cdot (n-1)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{(n-1)} d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

e a prova está concluída. □

3 Integral de ordem arbitrária

Anteriormente, provamos que a *Identidade de Cauchy* é válida para $n \in \mathbb{N}^*$, em que n indica a ordem da integral, todavia, durante o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, conforme Tieppo e Guzzo (2018), constatou-se que tal identidade não apresentaria inconveniente algum, além do fatorial, caso $(n-1) \in \mathbb{R}_+^*$. Sendo assim, tendo em vista a generalização da *Identidade de Cauchy*, se substituirmos $(n-1)!$ por $\Gamma(n)$, n poderá pertencer ao conjunto $\mathbb{R}_+^*$. Dessa forma, a “nova” *Identidade de Cauchy* com $n \in \mathbb{R}_+^*$ servirá de base para a definição de integral fracionária conforme proposta por Riemann e Liouville.

Definição 5. Sejam f uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Define-se a *integral de Riemann-Liouville de ordem α de f em $[a, b]$* , denotada por $({}_R L J_{a+}^\alpha f)(t)$ ou ${}_R L J_{a+}^\alpha(f)(t)$, como sendo

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Isto é,

$$({}_{RL}J_{a+}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Observação 2. Notemos que a continuidade de f garante a integrabilidade de f no sentido de Riemann-Liouville.

Observação 3. De modo a otimizar e descarregar a escrita daqui em diante, suprimiremos a sigla “RL” das notações de integral de Riemann-Liouville.

Observação 4. A partir deste ponto, a terminologia “ser integrável” indicará que a integral de Riemann-Liouville da função em questão existe no intervalo em questão, exceto se for feita menção contrária.

Proposição 6. Se $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $0 \leq k < \alpha$. Se $(J_{a+}^{\alpha}f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e for diferenciável k vezes em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então

$$\frac{d^k}{dt^k} (J_{a+}^{\alpha}f)(t) = (J_{a+}^{\alpha-k}f)(t).$$

Prova. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Podlubny (1999). $\square$

Teorema 7 (Lei dos expoentes). Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Se $(J_{a+}^{\beta}f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e é integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então

$$J_{a+}^{\alpha} (J_{a+}^{\beta}f)(t) = (J_{a+}^{\alpha+\beta}f)(t) = J_{a+}^{\beta} (J_{a+}^{\alpha}f)(t).$$

Prova. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Tieppo e Guzzo (2018). $\square$

4 Derivada fracionária segundo Caputo

Existem várias definições abordando o tema derivada de ordem arbitrária. Camargo e Oliveira apontam que

Talvez esta gama de definições esteja associada ao fato de que não tem-se uma clara interpretação física e/ou geométrica desse conceito de derivada, em contraste com o cálculo de ordem inteira, onde tal conceito admite interpretação geométrica (tangente) e física (velocidade, por exemplo). (CAMARGO & OLIVEIRA, 2015, p. 53)

Dentre essas várias formulações para derivada fracionária existem duas que são muito semelhantes entre si, são elas a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e a derivada fracionária segundo Caputo (ambas formulações pressupõem que a integração e derivação fracionária são operações inversas uma da outra) todavia, para os propósitos deste trabalho, nos concentraremos na formulação proposta por Caputo.

Como já visto na introdução, em seu livro *Lectures on Seismology and Rheological Tectonics* Caputo apresenta uma nova proposta para definirmos o conceito de derivada de ordem arbitrária, Camargo e Oliveira (2015) apontam alguns argumentos para defender a primazia desta nova forma de definir esse objeto matemático sobre a definição segundo Riemann-Liouville, seguem alguns desses argumentos:

- Matematicamente alguns autores atestam que o resultado da derivada de uma função constante ser diferente de zero constitui-se num inconveniente da definição de Riemann-Liouville, pois não pode ser interpretada como uma taxa de variação, fato que não ocorre quando adotamos a definição sugerida por Caputo.
- Parece ser mais apropriada para problemas onde se deseja incluir condições iniciais ou de contorno, fisicamente interpretáveis.

Isto posto, apresentaremos a seguir a formulação proposta por Caputo.

Definição 8. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ tais que $n - 1 \leq \alpha < n$ e f é uma função derivável (no sentido clássico) em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas integráveis em (a, b) . Define-se a *derivada fracionária de Caputo de ordem α de f em $[a, b]$* , denotada por $({}_CD_{a+}^\alpha f)(t)$ ou ${}_CD_{a+}^\alpha(f)(t)$, como sendo

$$\left({}_{RL}J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{dt^n} \right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds.$$

Isto é,

$$({}_CD_{a+}^\alpha f)(t) = \left({}_{RL}J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{dt^n} \right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds.$$

Notemos que Caputo sugere que derivemos n vezes a função e depois integremos $n - \alpha$ vezes o resultado obtido.

Observação 5. Notemos que a derivabilidade (no sentido clássico) de f garante a derivabilidade de f no sentido de Caputo.

Observação 6. De modo análogo ao que foi feito na seção anterior, nesta suprimiremos a letra “C” da notação de derivada segundo Caputo.

Observação 7. A partir deste ponto, a terminologia “ser derivável” indicará que a derivada de Caputo da função em questão existe no intervalo em questão, exceto se for feita menção contrária.

Os dois teoremas seguintes são as versões do teorema fundamental do cálculo para derivações e integrações de ordem arbitrária segundo Caputo, respectivamente. Suas demonstrações podem ser encontrada em Podlubny (1999).

Teorema 9. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n - 1 \leq \alpha < n$. Se $(J_{a+}^\alpha f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e for derivável em $[a, b]$, então

$$D_{a+}^\alpha (J_{a+}^\alpha f)(t) = f(t)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Teorema 10. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n - 1 \leq \alpha < n$. Se $(D_{a+}^\alpha f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e for integrável em $[a, b]$, então

$$J_{a+}^\alpha (D_{a+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

para todo $t \in [a, b]$.

5 O teorema do valor médio para integral fracionária de Riemann-Liouville

Primeiramente, começaremos provando uma proposição que pode ser vista como generalização do clássico teorema do valor médio (para integrais) sob a perspectiva do produto de duas funções.

Proposição 11. *Sejam f uma função contínua e g integrável (no sentido clássico), ambas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se g não possuir mudança de sinal em $[a, b]$, então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$, tal que*

$$\int_a^b (f \cdot g)(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Prova. Já que g não possui mudança de sinal em $[a, b]$, suponhamos $g(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Além disso, uma vez que f é contínua em $[a, b]$, o *teorema de Weierstrass* nos garante que existem c_1 e c_2 em $[a, b]$ tais que

$$f(c_1) \leq f(t) \leq f(c_2)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Assim, multiplicando as desigualdades anteriores por $g(t)$ e integrando-as, temos que

$$f(c_1) \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b (f \cdot g)(t) dt \leq f(c_2) \int_a^b g(t) dt$$

e assim

$$f(c_1) \leq \frac{1}{\int_a^b g(t) dt} \int_a^b (f \cdot g)(t) dt \leq f(c_2).$$

Do teorema do valor intermediário para funções contínuas, temos que existe $c \in [c_1, c_2] \subset [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b g(t) dt} \int_a^b (f \cdot g)(t) dt$$

logo, segue que

$$\int_a^b (f \cdot g)(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

para algum $c \in [a, b]$.

Para o caso em que $g(t) < 0$, para todo $t \in [a, b]$, a demonstração é análoga.

□

Teorema 12. *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e g integrável (no sentido clássico) em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$, tal que*

$$(J_{a+}^\alpha (f \cdot g))(t) = f(c) (J_{a+}^\alpha g)(t).$$

Prova. Da definição 5, e também da definição de produto entre funções, obtemos

$$(J_{a+}^\alpha (f \cdot g))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} g(s) ds.$$

Usando agora a proposição 11 na integral do segundo membro, encontramos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} g(s) ds = f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds = f(c) (J_{a+}^{\alpha} g)(t).$$

para algum $c \in [a, b]$. □

Isto posto, notemos que se adotarmos $g(t) = 1$ na proposição anterior, teremos a versão fracionária do clássico TVM para integrais.

Teorema 13 (1º TVMF). *Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$, tal que*

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(c) \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Prova.

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(t) = (J_{a+}^{\alpha} f \cdot 1)(t)$$

Aplicando o teorema 12 no segundo membro, temos que

$$\begin{aligned} (J_{a+}^{\alpha} f)(t) &= f(c) (J_{a+}^{\alpha} 1)(t) \\ &= f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha} \right) \Big|_{s=a}^t \\ &= f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(t-t)^{\alpha}}{\alpha} - \left(-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right) \right) \\ &= f(c) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} = f(c) \frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, concluímos que

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(c) \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

□

Diante disso, vale ressaltar que se adotarmos $\alpha = 1$ no teorema anterior e tomarmos t igual ao próprio b , teremos o clássico teorema do valor médio. Formalizaremos isto com o corolário seguinte.

Corolário 14. *Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\alpha = 1$ e $t = b$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$, tal que*

$$(J_{a+}^1 f)(b) = f(c)(b-a).$$

Prova. A demonstração é imediata, pois $\Gamma(2) = 1$. □

6 O teorema do valor médio para derivada fracionária segundo Caputo

Teorema 15 (2° TVMF). *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n - 1 \leq \alpha < n$. Se $(D_{a+}^\alpha f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e for integrável em $[a, b]$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\frac{D_{a+}^\alpha f(c)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(b-a)^\alpha}.$$

Prova. Da versão do teorema fundamental do cálculo para integração de ordem arbitrária segundo Caputo (teorema 10), sabemos que

$$J_{a+}^\alpha (D_{a+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Logo, utilizando o teorema 13, no primeiro membro dessa igualdade temos que

$$(D_{a+}^\alpha f)(c) \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

para algum $c \in [a, b]$, qualquer que seja $t \in (a, b]$.

Adotando $t = b$, temos

$$\frac{(D_{a+}^\alpha f)(c)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(b-a)^\alpha}.$$

□

Observemos que quando assumimos $\alpha = 1$, e f é tal que $f'(a) = 0$, recuperamos o clássico TVM para derivadas, fato esse que será formalizado com a proposição seguinte.

Corolário 16. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $n - 1 \leq \alpha < n$. Se $(D_{a+}^\alpha f)(t)$ existe em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, for integrável em $[a, b]$, $\alpha = 1$ e $f'(a) = 0$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}.$$

Prova. Fazendo uso do teorema 15, temos que

$$\frac{(D_{a+}^\alpha f)(c)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(b-a)^\alpha}.$$

Além disso, uma vez que $\alpha = 1$, da definição 8, temos que $n - 1 = 1$. Logo,

$$\frac{(D_{a+}^1 f)(c)}{\Gamma(1 + 1)} = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^1 \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(b-a)^1}$$

e portanto

$$\frac{1}{\Gamma(2)} \left(J_{a^+}^{2-1} \frac{d^2 f}{dt^2} \right) (c) = \frac{f(b) - \frac{(b-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) - \frac{(b-a)^1}{1!} f'(a)}{(b-a)}.$$

Uma vez que $\Gamma(2) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \left(J_{a^+} \frac{df'}{dt} \right) (c) &= \frac{f(b) - f(a) - 0}{(b-a)} \\ \implies f'(c) - f'(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \\ \implies f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}. \end{aligned}$$

□

Conclusões

Este trabalho teve por intuito explorar brevemente os caminhos do desenvolvimento do cálculo fracionário, de modo a obter a versão fracionária do clássico teorema do valor médio para derivadas. Este resultado possui grande importância para o desenvolvimento do cálculo fracionário, dado seu potencial para aplicações em equações diferenciais fracionárias.

Referências

- CAMARGO, Rubens Figueiredo e Oliveira, Edmundo Capelas de. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 184p.
- DIETHELM, Kai. *The mean value Theorems and a Nagumo-Type Uniqueness theorem for Caputo's fractional calculus (Corrected Version)*. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1709.01113v1>. Acesso em: 07 ago. 2019
- LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**: Volume 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra.
- OLIVEIRA, Altenize dos Santos Cordeiro. *Cálculo fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas*. 2018. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Aplicada e Computacional, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2018. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/331213/1/Oliveira_AltenizeDosSantosCordeiro_M.pdf. Acesso em: 14 nov. 2018.
- OLIVEIRA, Heron Silva. *Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária*. 2010. 66 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2010. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307000/1/Oliveira_HeronSilva_M.pdf. Acesso em: 14 nov. 2018.

PODLUBNY, Igor. **Fractional differential equations**. Mathematics in science and engineering, vol 198. Academic press, 1999.

TIEPPO, Sandra Maria; GUZZO, Sandro Marcos. Elementos do Cálculo Fracionário.

Jeepema: Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática. Maringá, p. 45-79. jul. 2018.

Materiais manipulativos: uma opção metodológica para trabalhar geometria espacial

Gabriela de Melo Devens
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
devensgabi@hotmail.com

Juliana Terezinha de Oliveira Moura
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
juterezinha98@gmail.com

Pamela Gonçalves
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pangoncalves@gmail.com

Resumo: Este artigo baseia-se em uma experiência de estágio na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II, destacando atividades realizadas utilizando materiais manipulativos como uma opção para o ensino de poliedros em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio. Sabe-se que não existe uma receita para educar e que devido à diversidade encontrada nas salas de aula, temos diferentes alunos que compreendem e assimilam informações de maneiras variadas, o presente artigo, traz uma reflexão sobre a escolha de metodologias ao se observar e trabalhar em sala de aula.

Palavras-chave: Metodologias; Materiais manipulativos; Geometria;

1 Introdução

Os indivíduos estão em constante aprendizado e durante estes processos se apropriam de novos conhecimentos ou ainda aprofundam os que possuem, Silva (2003), define que:

A aprendizagem é a capacidade e a possibilidade que as pessoas têm para perceber, conhecer, compreender e reter na memória as informações obtidas. É este o cortejo que leva à ampliação e ao enriquecimento das experiências anteriormente vividas; trata-se de um processo complexo que possibilita a criação e o desenvolvimento de novos conhecimentos (SILVA, 2003, p. 6).

Para futuros professores os estágios e experiências em sala de aula, são constantes aprendizados. Novas experiências geram novos aprendizados e moldam os futuros professores, sendo o estagio um momento em que pode-se explorar diversas formas de tratar diferentes contextos.

Sabemos que não é de hoje que o ensino de matemática apresenta grandes “problemas”, Vitti (1999, p.19) afirma que “o fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo”. O autor destaca ainda a existência de vários pesquisadores, que assinalaram diversos motivos para a disciplina Matemática, ser lembrada mais por fracassos do que sucessos.

De acordo com Saviani (1991), o método tradicional de ensino continua sendo o mais utilizado, e observamos ainda hoje uma representatividade muito extensa da metodologia tradicional nas escolas brasileiras. Saviani (1991), define o ensino tradicionalista como a metodologia na qual o professor é quem domina os conteúdos logicamente e dá ênfase a transmissão de conhecimentos. Isto pode acarretar em alguns prejuízos à educação, como a falta de participação dos alunos e simples memorização de definições e fórmulas. Mizukami (1986) destaca que o papel do indivíduo é basicamente de passividade:

...atribui-se ao sujeito um papel irrelevante na elaboração e aquisição do conhecimento. Ao indivíduo que está adquirindo conhecimento compete memorizar definições, enunciados de leis, sínteses e resumos que lhes são oferecidos no processo de educação formal a partir de um esquema atomístico (MIZUKAMI, 1986. p.11).

O papel passivo, faz com que muitas vezes os alunos não prestem atenção a aula e isto pode gerar outros problemas, como a memorização para cumprir com uma avaliação. Kline (1976. p.22), destaca que "com ou sem prova, o método tradicional de ensinar resulta francamente num único tipo de aprendizagem: memorização". Pontos como estes são levantados e abordados por diversos educadores e pesquisadores, pensando no quão mecânico esta metodologia pode ser.

Baseadas nestes pressupostos, para o estágio realizado, pensou-se em trabalhar de forma a garantir uma aprendizagem significativa, mas não excluir totalmente a metodologia tradicional, pois como afirma Libâneo (1994):

O método expositivo é bastante utilizado em nossas escolas, apesar das críticas que lhe são feitas, principalmente por não levar em conta o princípio da atividade do aluno. Entretanto, se for superada esta limitação, é um importante meio de obter conhecimentos. A exposição lógica da matéria continua sendo, pois, um procedimento necessário, desde que o professor consiga mobilizar a atividade interna do aluno de concentrar-se e de pensar, e a combine com outros procedimentos, como o trabalho independente, a conversação e o trabalho em grupo (LIBÂNEO, 1994, p.161).

Levando em considerações as referências apresentadas, objetivou-se, apresentar significados ao conteúdo ensinado, trabalhando de forma que os alunos sejam participativos em seu processo de aprendizagem. Optou-se em trabalhar de maneiras diferenciadas, pois o período do estágio supervisionado é um momento seguro para aproveitar e se dedicar, bem como ter a possibilidade de realizar com os alunos atividades diferenciadas que os auxilie na apropriação de conteúdos e que podem resultar em experiências diversas.

2 Dialogando sobre algumas metodologias

Com base nas referências apresentadas e intencionando propor um ensino diferenciado, os materiais manipulativos serviram de base para algumas aulas. Sabe-se que não é de hoje que os materiais manipulativos surgiram e ao longo dos anos, diversos professores e pesquisadores,

como Caldeira (2009) e Lorenzato (2006), se dedicaram a estudar materiais e instrumentos que pudessem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs), um dos princípios do ensino de matemática é a utilização dos recursos didáticos numa perspectiva para problematizar, e sobre isso destaca que:

Os [...] Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, radio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (BRASIL, 1998, p.57).

Os materiais manipulativos possuem diversas definições, variando entre educadores/pesquisadores, Caldeira (2009) corrobora:

O material manipulativo, através de diferentes actividades, constitui um instrumento para o desenvolvimento da matemática, que permite ao indivíduo realizar aprendizagens diversas. O princípio básico referente ao uso dos materiais, consiste em manipular objectos e “extrair” princípios matemáticos. Os materiais manipulativos devem representar explicitamente e concretamente ideias matemáticas que são abstratas (CALDEIRA, 2009, p.223).

O uso de materiais manipulativos pode ser concebido como mediador na aprendizagem de diversos temas de matemática. Sarmento (2010) ressalta que os materiais manipulativos permitem aos alunos experiências físicas e lógicas, possibilitando abstrações e podendo evoluir para generalizações, ou seja, pode permitir experiências, e quando o aluno tem contato direto, independente da forma aplicada, seja medindo, descrevendo ou comparando objetos, pode proporcionar diversas abstrações.

Há décadas os educadores buscam alternativas para uma aprendizagem significativa, pois os índices de deficiência no ensino, se torna alarmante, “em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão” (BRASIL, 1998, p. 19). Um dos muitos motivos dos baixos índices no rendimento é que muitos alunos ainda têm uma visão mistificada da matemática, de acordo com Gerdes (1981):

A matemática é percebida, por muitos indivíduos, como sendo uma disciplina abstrata e totalmente separada das situações cotidianas, pois, muitos pensam que a matemática é uma ciência abstrata, muito difícil de aprender e desligada do cotidiano do homem (GERDES, 1981, p.3)

Com todas essas defasagens muito se fala de chegar a uma aprendizagem significativa para o aluno, mas pouco se utiliza a real definição dela. Moreira (2010) diz que aprendizagem significativa se baseia em utilizar os conteúdos prévios, isto é, o aluno aprende a partir do que já sabe, a utilização desta definição poderia facilitar a aprendizagem dos alunos. Um pensamento errôneo que ocorre ao se falar de aprendizagem significativa, é focar no conteúdo que se quer ensinar, pensando no “significativo” como algo sobre lembrar da própria definição e teoremas do conteúdo, sem priorizar ou trabalhar com as relações que este possa ter com outro conteúdo ou com alguma experiência e conhecimento prévio do aluno.

Enfim, compreendendo as dificuldades existentes e a visão da matemática desconectada da realidade, sabemos que a disciplina é considerada um “terror” para muitos alunos e com isso a busca frequente por uma aprendizagem significativa e competir com os diversos estímulos existentes, leva os professores a uma incansável busca por novidades e abordagens diferenciadas, e um exemplo disso são o uso de materiais manipulativos.

A utilização de materiais manipulativos pode auxiliar na aprendizagem, pois traz algo concreto para o aluno, e ainda pode oferecer diversas vantagens como destaca Sarmiento (2010):

A utilização dos materiais manipulativos oferece uma série de vantagens para a aprendizagem das crianças. Podemos destacar: a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da Matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas (SARMENTO, 2010, p.4).

Do mesmo modo, quando utilizamos os materiais manipuláveis, os alunos têm um maior contato com o conteúdo esperado e podem desenvolver suas teorias a partir da manipulação e relacionar com os conteúdos prévios existentes. De acordo com Sarmiento (2010), os objetos aguçam a curiosidade dos alunos, possibilitando um desenvolvimento no intelecto dos alunos.

Por fim, existem as mais variadas opiniões e pesquisas existentes sobre o ensino, sabe-se que não existe uma receita única para educar, e com isso, podem ser aproveitadas diversas metodologias em uma sala de aula, para que os objetivos esperados e planejados, sejam alcançados.

3 Atividades sólidos geométricos

Antes de iniciarmos propriamente com a atividade preparada, introduzimos o conteúdo com uma metodologia tradicional, procurando dar significado e solicitando a participação dos alunos, apresentando os elementos que compõem os poliedros: arestas, bases, vértice e faces.

Ponderando sobre as aulas com a turma e os demais conteúdos que deveríamos trabalhar, como a relação de Euler, pensamos em oferecer algo diferenciado e manipulativo para os alunos. Lorenzato (2006, p.9) ressalta o fato de que “os materiais devem visar mais diretamente à ampliação de conceitos, à descoberta de propriedades, à percepção da necessidade do emprego de termos ou símbolos, à compreensão de algoritmos, enfim, aos objetivos matemáticos”.

O próximo conteúdo que deveríamos trabalhar com os alunos era a relação de Euler, pensamos em propor uma atividade com materiais manipulativos, à luz do pensamento de Lorenzato (2006), utilizamos o material para elencar propriedades. O material organizado para a atividade, foi a construção de poliedros com balas de goma ou jujubas, que se consistiu no uso de palitos de dentes para as arestas e jujubas para os vértices, além disso relacionamos os elementos dos poliedros e a relação de Euler.

Como mencionado anteriormente, algumas aulas aconteceram com a metodologia tradicional, no entanto, também utilizamos alguns recursos, como os sólidos geométricos e o geogebra, para apresentarmos de maneira visual, as caracterizações e classificações dos poliedros.

Na aula em que a atividade foi desenvolvida, iniciamos a aula abordando algumas definições que faltavam e apresentamos os sólidos que os alunos deveriam construir. Pedimos que os alunos se juntassem em grupos de até quatro pessoas e então aguardassem a distribuição do material para posteriores instruções.

Distribuímos a cada aluno, um copo com jujubas e uma quantidade de palitos de dente. Informamos aos alunos que cada grupo deveria construir os cinco sólidos solicitados e então preencher o quadro abaixo que foi entregue:

Tabela 1: tabela dos poliedros

	Vértice	Faces	Arestas	V-A+F
Tetraedro				
Hexaedro ou Cubo				
Pirâmide de base quadrangular				
Prisma triangular				
Octaedro				

Fonte: Acervo das autoras.

A intenção da atividade é chegar à relação de Euler, de forma que os alunos percebessem a regularidade, para depois formalizarmos. Durante a aplicação da atividade, os alunos acabaram mostrando ter dificuldades em relação à construção, pois confundiram os tipos de poliedros e seus dados e, consequentemente erraram no preenchimento da tabela.

Para tentarmos contornar estas dificuldades, apresentamos os sólidos no projetor e também deixamos separados os sólidos em acrílico para que os alunos pudessem pegá-los caso precisassem. Enquanto os alunos realizavam as construções, acompanhávamos os grupos para ver se precisavam de ajuda para finalizar a atividade e também para poder acompanhar se eles compreendiam a regularidade da última coluna da tabela.

Durante a realização da atividade alguns alunos comentaram “a última coluna só da dois”, questionados sobre isto, ou eles não sabiam responder ou diziam ser coincidência, mas nenhum aluno mencionou a existencia de uma possível relação. Após questionarmos os alunos, e nenhum aluno relacionar com alguma relação, formalizamos os conteúdos ressaltando alguns pontos.

A relação de Euler é uma relação matemática com poliedros, em que o número de vértices, menos o número de arestas, mais o número de faces é igual a dois. Alguns alunos ficaram intrigados e tentaram calcular a relação para um poliedro côncavo que havíamos apresentado na aula anterior, mas ressaltamos que esta relação é válida para todos os poliedros convexos e

pode ser verificada pra alguns poliedros côncavos, como:

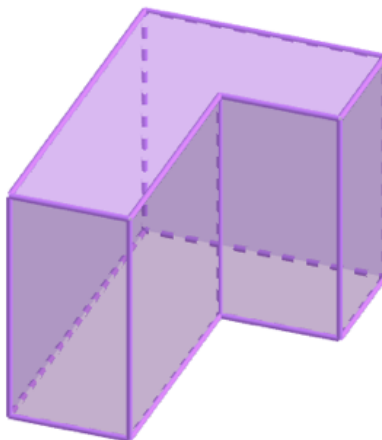


Figura 1: Poliedro côncavo

Fonte: Acervo das autoras.

No poliedro acima pode ser verificado a relação de Euler, para o caso de um poliedro côncavo, pois temos 18 arestas, 12 vértices e 8 faces, fazendo $V-A+F$, temos $12-18+8=2$, logo é verificada a relação de Euler.

Após as explicações e esclarecimentos sobre para quais tipos de poliedros a relação é verificada, prosseguimos a aula, realizando com os alunos diversos problemas que envolviam a relação de Euler e os poliedros estudados.

A realização da construção dos poliedros com as jujubas, auxiliou os alunos a enxergar, tocar e relacionar os elementos utilizados com os componentes dos poliedros. Isso colaborou para explicitar algumas dificuldades que os alunos possuíam em relação aos conceitos referentes a poliedros, e com a utilização do material manipulativo, os alunos puderam compreender quais eram as duas dificuldades.

A seguir estão fotos de algumas construções realizadas:

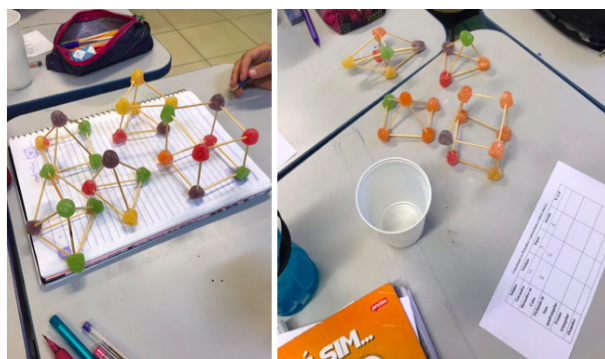


Figura 2: Poliedros construídos com jujubas

Fonte: Acervo das autoras.

Além da atividade para a abordagem da relação de Euler, trabalhamos com os alunos uma atividade com prismas para contextualizá-los do quanto estes sólidos estão presentes na vida de cada um. Normalmente os alunos veem os conteúdos matemáticos, como algo distante da realidade e como aborda Ramos (2017):

No cotidiano das salas de aula é possível perceber nos alunos certa dificuldade na aprendizagem, quando este, está relacionado com conceitos matemáticos. Perante tal situação deve-se construir estratégias matemáticas que facilitem a aprendizagem dos alunos na tentativa de sanar as dúvidas que cercam tal problemática [...] (RAMOS, 2017, p. 12).

Avaliando a dificuldade que os alunos podem encontrar, pensamos na atividade de contextualização, pois como relata Mendes (2009):

Verificar a Matemática presente nas diversas situações em que construímos nossa realidade sociocultural, ampliando o conhecimento obtido historicamente. [...] é uma forma importante de conduzir o aluno à reelaboração do conhecimento existente nos livros didáticos de Matemática, assim como desenvolver atividades científicas voltadas para a investigação [...] (MENDES, 2009, p. 125).

A atividade sobre os prismas foi realizada após a apresentação do conteúdo e se tratando de uma aula de fixação utilizamos elementos do dia a dia dos alunos, para que pudessem assimilar os conteúdos matemáticos com elementos conhecidos por eles. Propomos aos alunos a atividade denominada raio X.

Iniciamos dividindo os alunos em grupos de três alunos e entregamos a cada grupo algumas embalagens em forma de prismas. Os alunos deveriam identificar os seguintes itens:

- Nomenclatura;
- Vértices;
- Faces;
- Arestas;
- Relação de Euler em cada um dos prismas;

Preenchendo a seguinte tabela:

Tabela 2: Atividade raio X

Nomenclatura	Vértices	Faces	Arestas	Relação de Euler

Fonte: Acervo das autoras.

Durante a atividade pudemos perceber dificuldades conceituais dos alunos em relação a identificação dos elementos e nomenclaturas dos prismas. Nestes momentos, abordamos os grupos esclarecendo as dúvidas, para que na explanação da atividade não ocorressem descrições errôneas.

Após os preenchimentos, foi estabelecido em cada grupo, um prisma do qual eles deveriam realizar uma descrição com os dados anotados, a fim de realizar uma socialização com os outros alunos, de modo que cada grupo expusesse suas considerações sobre um prisma e os demais indicassem o prisma descrito.

Para a atividade tínhamos alguns prismas com características semelhantes, assim os alunos poderiam apontar mais de um prisma com as características descritas. Utilizamos estes momentos para esclarecer demais dúvidas e características gerais dos prismas, realizando observações com os prismas que possuem as mesmas características.

De forma geral, a atividade se desenrolou sem grandes dificuldades, além disso serviu para que os alunos pudessem esclarecer dúvidas importantes que alguns ainda tinham, mas muitas vezes nem percebiam e, utilizando a atividade e os materiais, isto ficou evidente.

Nesta aula, faltavam poucos dias para a avaliação escrita dos alunos, então após a atividade, entregamos aos alunos uma lista de exercícios para que iniciassem em sala e terminassem em casa, para poderem fixar o conteúdo e nos questionar sobre suas possíveis dúvidas na próxima aula.

Considerações finais

Consideramos que as atividades propostas para o conteúdo foram de suma importância na aprendizagem, pois os materiais ajudaram a atrair os alunos e a focar a atenção deles no conteúdo que estava sendo proposto.

Compreendemos que a matemática é uma matéria rica e cheia de conceitos, e como futuras professoras, buscamos sempre encantar os alunos com a matemática, tentando desfazer os misticismos existentes. Nesse viés, considerando todas as dificuldades encontradas hoje em uma sala de aula, buscamos desenvolver nos alunos um pensamento lógico próprio, como destaca Dante (2005, p.11) “é preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela”. Utilizando como recurso tanto a metodologia tradicional quanto os materiais manipulativos, procuramos dar voz aos alunos, fazendo com que eles participassem e desenvolvessem suas ideias.

Apesar disso, entendemos que o ensino através de definição e fórmula é predominante, mas como ressaltado no Currículo Básico do Estado do Paraná:

Aprender Matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber estes mesmos problemas, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar e transcender o imediatamente sensível (PARANÁ, 1990, p. 66).

E com este ensino predominante, os alunos são acostumados a fórmula, exemplo, exercício, sem desenvolver significados e o raciocínio lógico, como ressaltado. Isto resulta em um ensino mecanizado, no qual enquanto os professores ministram aula, os alunos se dispersam, se distraem com qualquer detalhe, sem prestar muita atenção à aula.

Consideramos que as experiências neste estágio foram enriquecedoras para nossa profissão, pois vivenciamos experiências diferentes, trabalhando em sala de aula com materiais e tentando evitar uma metodologia completamente tradicional que poderia resultar em uma simples memorização de fórmulas. Pudemos observar que mesmo uma pequena mudança na sala de aula, pode surtir resultados, logo não se faz necessário mudanças exorbitantes, nem grandes atividades para que possamos auxiliar os alunos proporcionando experiências e contextualizando a matemática.

Referências

- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CALDEIRA, Maria Filomena Tomaz Henrique. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática**. 826f. Tese de Doutorado. Universidade de Mágala, 2009.
- DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo, 2005.
- GERDES, Paulus. **A ciência Matemática**. Moçambique: Núcleo Editorial, 1981.
- KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA – instituto Brasileiro de Difusão Cultural, 1976.
- LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 13 ed. São Paulo: Cortez, 1994.
- LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.
- MOREIRA, Marco Antonio. **O que é afinal aprendizagem significativa?**. Cuiabá 2010. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná**. Curitiba, SEED, 1990

RAMOS, Taurino Costa. A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental II. **Cairu em revista**, 2017. Disponível em: https://www.cairu.br/revista/arquivos/artigos/20171/11_IMPORTANCIA_MATEMATICA.pdf.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. Anais do VI Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI, 2010, CD. Disponível em: http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. 24 ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SILVA, Viviane Graça da. **Dificuldades de aprendizagem**. Rio de Janeiro, 2003. Disponível em: <https://www.avm.edu.br/monopdf/6/viviane%20graça%20da%20silva.pdf>.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer: a partir da história e da geometria**. 2 ed. Piracicaba, São Paulo. Editora UNIMEP. 1999.

Funções de Mittag-Leffler e aplicações

Cintya Akemi Okawa¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

cintyaokawa@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

smguzzo@gmail.com

Resumo: Este trabalho apresenta o estudo das funções de Mittag-Leffler e suas aplicações na obtenção de soluções de equações diferenciais ordinárias de ordem fracionária. Para isto estudaremos a integral fracionária de Riemann-Liouville e a derivada fracionária de Caputo, utilizaremos também a função Gama, além da transformada de Laplace.

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Funções de Mittag-Leffler; Equações diferenciais de ordem fracionária.

Introdução

Muitos fenômenos naturais, sociais, químicos ou físicos podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias (EDOs). Estudar as soluções de uma equação diferencial permite conhecer melhor o comportamento do fenômeno de interesse. Em algumas aplicações, entretanto, as equações não possuem ordem inteira. São conhecidas então como equações de ordem fracionária. A transformada de Laplace se aplica muito bem nesses casos, e conduz a uma classe de soluções conhecidas como funções de Mittag-Leffler.

Neste trabalho, estudaremos, primeiramente, sobre a transformada de Laplace e as funções de Mittag-Leffler. Em seguida, trataremos a definição de derivada fracionária segundo Caputo e algumas propriedades. Por fim, apresentaremos dois fenômenos descritos por EDOs e suas soluções a partir da teoria estudada.

1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace pertence a uma família muito vasta de transformadas dadas pela expressão

$$F(s) = \int_I K(s, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Uma transformada particular necessita então da definição do núcleo $K(s, t)$ e do intervalo da integração I , sendo estes escolhidos dependendo do interesse ou da aplicação. As transformadas mais utilizadas são a de Fourier, que utiliza

$$I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \quad \text{e} \quad K(s, t) = e^{-ist}, \quad s \in \mathbb{R}$$

¹Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES.

e a de Laplace, que requer

$$I = [0, \infty) \quad \text{e} \quad K(s, t) = e^{-st}, \quad s = a + ib \in \mathbb{C}.$$

Já que s é complexo, a transformada de Laplace é uma generalização da transformada de Fourier. Neste texto, entretanto, não estamos interessados no trato com os números complexos, e portanto consideraremos a transformada de Laplace quando $s \in \mathbb{R}$. Nestes termos, segue a definição de Transformada de Laplace que utilizaremos.

Definição 1. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

quando existir, será chamada de Transformada de Laplace de f .

Proposição 2. A transformada de Laplace é um operador linear. De outra forma, se f e g são funções cujas transformadas de Laplace existem e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g).$$

Proposição 3 (Transformada de uma derivada). Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Se f e f' forem contínuas em $[0, \infty)$ e tais que as transformadas de Laplace existem, então

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Corolário 4. Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Se $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e tais que as transformadas de Laplace existem, então

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0).$$

O leitor interessando nas demonstrações das propriedades acima poderá encontrá-las em Zill e Cullen (2001).

Estas propriedades tornam a transformada de Laplace uma ferramenta útil para determinar soluções de equações diferenciais. Para facilitar as ideias, considere uma equação diferencial linear a coeficientes constantes na função $y = y(t)$,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

sendo que $y^{(k)}$ refere-se à derivada de ordem k da função $y = y(t)$, e os coeficientes a_k são constantes.

Aplicamos em ambos os membros desta equação diferencial a transformada de Laplace. Em virtude da linearidade e da propriedade da derivada obtemos

$$h(s)Y(s) = g(s)$$

sendo que $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ é a transformada de Laplace da função $y(t)$, e as funções $h(s)$ e $g(s)$ são funções resultantes da reorganização dos termos. Esta nova equação agora é uma equação algébrica na variável $Y(s)$. Resolvendo esta equação algébrica chegamos a

$$\mathcal{L}(y)(s) = Y(s) = \frac{g(s)}{h(s)}.$$

Observe que com isto conseguimos, não exatamente a solução desejada $y(t)$ da equação diferencial, mas sim a transformada de Laplace da solução da equação diferencial. Poderíamos recuperar a solução $y(t)$ se pudéssemos inverter o processo. De outra forma, se pudéssemos aplicar a “Transformada de Laplace Inversa” em ambos os membros. Assim podemos chegar a próxima definição.

Definição 5. Se $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ representa a transformada de Laplace de uma função $f(t)$, dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t).$$

2 Funções de Mittag-Leffler

As funções de Mittag-Leffler podem ser definidas como funções complexas a valores complexos. Entretanto, neste trabalho, estamos particularmente interessados nestas definições envolvendo apenas números reais. Seguiremos com as definições conforme dispostas em Mittag-Leffler (1903) e Humbert e Agarwal (1953). As funções de Mittag-Leffler envolvem a função Gama, por isso precisaremos desta definição.

Definição 6. A função gama é a função que a cada real positivo $x > 0$ associa o número real representado por $\Gamma(x)$ determinado pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

A partir desta definição, se $x > 0$ então $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Além disso, se $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $\Gamma(n) = (n-1)!$, por este motivo a função Gama é conhecida como a generalização do fatorial. As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em Oliveira (2014).

Seguiremos agora com a definição da função de Mittag-Leffler a um parâmetro e da função de Mittag-Leffler a dois parâmetros.

Definição 7. A função de Mittag-Leffler a um parâmetro real $\alpha > 0$ é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real $E_{\alpha}(x)$ dado por

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Note que com $\alpha = 1$, temos que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad (2)$$

por este motivo, a função de Mittag-Leffler a um parâmetro é conhecida como função exponencial generalizada. Também podemos ver que

$$E_2(-ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ax^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{a}x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\sqrt{a}x), \quad (3)$$

e que

$$E_2(ax^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k}}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{a}x), \quad (4)$$

para qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$.

Definição 8. A função de Mittag-Leffler a dois parâmetros reais $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ é a função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real $E_{\alpha,\beta}(x)$ dado por

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Note que se $\beta = 1$,

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(x),$$

e desta forma a função de Mittag-Leffler a dois parâmetros é uma generalização da função de Mittag-Leffler a um parâmetro. Dessa forma temos claramente

$$E_{1,1}(x) = E_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad E_{2,1}(-x^2) = E_2(-x^2) = \cos(x),$$

também

$$xE_{2,2}(-ax^2) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ax^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}x), \quad (5)$$

e

$$xE_{2,2}(ax^2) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh(\sqrt{a}x), \quad (6)$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$.

É possível provar que as séries que definem as funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha}(x)$ e $E_{\alpha,\beta}(x)$ são convergentes qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Agora estamos interessados em determinar a transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler. Queremos então obter expressões que nos permitam estabelecer uma relação entre as funções de Mittag-Leffler e a transformada de Laplace.

Proposição 9. Para quaisquer $a, \alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, tem-se

$$\mathcal{L}(E_{\alpha}(at^{\alpha}))(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - a},$$

para $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Prova. Pela definição de transformada de Laplace, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(at^\alpha) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-st} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt.\end{aligned}$$

Como a série é convergente e a integral imprópria também converge, podemos comutar o sinal da integral com o sinal do somatório, e então

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-st} \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt.$$

Vamos agora olhar para a integral do último membro. Fazendo nela a mudança de variáveis $u = st$, temos então que $\frac{du}{dt} = s$, e quando $t = 0$ então $u = 0$ e quando $t \rightarrow \infty$ também $u \rightarrow \infty$ já que $s > 0$, e assim

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} \frac{1}{s} s dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k} du.$$

Da definição de função gama, temos que a última integral é exatamente $\Gamma(\alpha k + 1)$. Segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \Gamma(\alpha k + 1) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\alpha k + 1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k.\end{aligned}$$

Como $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$, então $\frac{a}{s^\alpha} < 1$. Desta forma, a série do último membro é uma série geométrica convergente para o número

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^\alpha}{s^\alpha - a},$$

logo,

$$\mathcal{L}(E_\alpha(at^\alpha))(s) = \frac{1}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha - a} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}.$$

□

Proposição 10. Para quaisquer $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta > 0$, tem-se

$$\mathcal{L}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right)(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},$$

para $s > a^{\frac{1}{\alpha}}$.

A prova dessa proposição é análoga à anterior. Desta forma, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}\right) = E_\alpha(at^\alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}\right) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha).$$

3 Derivada fracionária de Caputo

A noção de derivada de ordem fracionária segundo Caputo leva em conta a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville, por isso a estudaremos primeiro.

Usaremos o símbolo $\frac{d}{dt}$ para designar o operador derivada de uma função e J para designar o operador integral de uma função em um certo intervalo $[a, b]$. Assim, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{df}{dt}(t) = f'(t)$$

e

$$(Jf)(t) = J(f)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

As derivações e integrações de ordem superior são definidas recursivamente por

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t) \right) \quad \text{e} \quad (J^n f)(t) = J(J^{n-1}f)(t),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$.

A próxima proposição expressa um resultado do cálculo diferencial e integral clássico, conhecido como identidade de Cauchy para integrais repetidas, que motiva a definição da Integral fracionária de Riemann-Liouville. O leitor interessado poderá encontrar esta demonstração em Tieppo e Guzzo (2018).

Proposição 11 (Identidade de Cauchy). *Se f é uma função integrável em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então*

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

Observe que a identidade de Cauchy é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, o único impedimento para $n \in \mathbb{R}$ é a presença do fatorial. Trocamos então $(n-1)!$ por sua generalização $\Gamma(n)$. Esta é a ideia base da definição da integral de Riemann-Liouville.

Definição 12. Suponha que $f(t)$ seja contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ da função f é a função denotada por $J_{a+}^\alpha(f)(t)$ ou por $(J_{a+}^\alpha f)(t)$ e definida por

$$J_{a+}^\alpha(f)(t) = (J_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Notemos que a integral da definição anterior está bem definida pois $f(s)$ e $(t-s)^{\alpha-1}$ são integráveis em $[a, t]$ qualquer que seja $\alpha > 0$.

Podemos agora definir a derivada fracionária de Caputo.

Definição 13. Sejam $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em (a, b) , então a derivada fracionária de Caputo de ordem α de f , definida em $[a, b]$ é dada por

$$(D_{a+}^\alpha f)(t) = (J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f)(t)$$

$$= (J_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} f(s) ds,$$

sendo que J_{a+} se refere à integral fracionária de Riemann-Liouville e $\frac{d^n}{ds^n} f = f^{(n)}$ se refere à derivada de ordem n de f .

Veremos agora a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville e da derivada de Caputo.

Proposição 14. *Sejam $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville é dada por*

$$\mathcal{L}(J_{0+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).$$

Prova. De acordo com a definição de integral de Riemann-Liouville e da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(J_{a+}^\alpha f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} (J_{a+}^\alpha f)(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt \end{aligned}$$

Faremos agora uma mudança na ordem de integração, obtendo

$$\mathcal{L}(J_{a+}^\alpha f)(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} (t-\tau)^{\alpha-1} dt d\tau$$

Fazendo agora a mudança de variáveis, com $u = t - \tau$, temos $du = dt$ e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(J_{a+}^\alpha f)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} u^{\alpha-1} du d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} du d\tau, \end{aligned}$$

agora, com $v = su$, temos $\frac{dv}{du} = s$, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(J_{a+}^\alpha f)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^\infty e^{-v} \left(\frac{v}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} dv d\tau \\ &= \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv d\tau \\ &= \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathcal{L}(f)(s) \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}(J_{0+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s),$$

como desejado. □

Proposição 15. *Sejam $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\alpha \in [n-1, n)$. Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em $[a, b]$, então a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo é dada por*

$$\mathcal{L}(D_{0+}^{\alpha}f)(s) = s^{\alpha}\mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Prova. Aplicando a transformada de Laplace na definição de derivada de Caputo, e pela Proposição anterior temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_{0+}^{\alpha}f)(s) &= \mathcal{L}\left(J_{0+}^{n-\alpha}f^{(n)}\right)(s) \\ &= s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) \\ &= s^{\alpha-n}\left(s^n\mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)\right) \\ &= s^{\alpha}\mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \end{aligned}$$

sendo que também usamos o Corolário 4. □

Outras propriedades da integral fracionária de Riemann-Liouville e da derivada de Caputo podem ser encontradas em Camargo e Oliveira (2015), Rahimy (2010), Kilbas, Srivastana e Trujillo (2006) ou Podlubny (1999).

4 Equações diferenciais fracionárias

Nesta seção vamos usar os resultados obtidos anteriormente na resolução de três aplicações. Em cada uma das aplicações falaremos primeiramente da formulação da EDO em seu modelo clássico, e então passaremos para sua versão fracionária.

4.1 Dinâmica populacional

Veremos dois modelos de crescimento populacional. Os modelos de Malthus e Verhulst. A equação diferencial de Malthus é mais simples. Malthus disse que: “A taxa de variação de uma população é diretamente proporcional ao número de indivíduos”.

Vamos designar $p(t)$ a quantidade de indivíduos em um determinado instante t , temos que $p'(t) = \frac{d}{dt}p$ é a taxa de variação da população $p(t)$ no instante t . Logo, a equação que modula a lei de formação de Malthus é

$$p'(t) = rp(t),$$

sendo r a constante de proporcionalidade que indica se $p(t)$ é crescente (com $r > 0$), constante (com $r = 0$) ou decrescente (com $r < 0$). A solução clássica deste modelo é $p(t) = p(0)e^{rt}$, sendo $p(0)$ a população inicial.

Vamos agora generalizar este problema. Para que a versão fracionária fique em conformidade com sua versão clássica é necessário que $\alpha \in (0, 1]$. Consideremos então

$$p^{(\alpha)}(t) = rp(t),$$

sendo que $p^{(\alpha)} = D_{a+}^{\alpha}p$. Aplicando a transformada de Laplace na igualdade

$$\mathcal{L}\left(p^{(\alpha)}(t)\right) = \mathcal{L}(rp(t)),$$

levando em consideração a Proposição 2 e a Proposição 15 temos

$$s^{\alpha}\mathcal{L}(p)(s) - s^{\alpha-1}p(0) = r\mathcal{L}(p)(s),$$

e então

$$s^{\alpha}\mathcal{L}(p)(s) - r\mathcal{L}(p)(s) = s^{\alpha-1}p(0),$$

assim

$$\mathcal{L}(p)(s)(s^{\alpha} - r) = s^{\alpha-1}p(0),$$

e portanto

$$\mathcal{L}(p)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - r}p(0).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e utilizando o resultado da Proposição 9, obtemos

$$p(t) = p(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - r}\right) = p(0)E_{\alpha}(rt^{\alpha}),$$

solução da equação fracionária.

Note que quando $\alpha = 1$, da igualdade 2,

$$p(t) = p(0)E_1(rt) = p(0)e^{rt},$$

que coincide com a solução do modelo clássico.

O modelo proposto por Verhulst pressupõe que a população controla o seu crescimento e este crescimento não é constante r , mas sim uma função $R(p)$ que depende do número de indivíduos $p(t)$.

Verhulst pressupôs que existe uma constante $k > 0$ que é o número máximo de indivíduos permitidos. Esta constante é entendida como a capacidade máxima de suporte populacional do meio ambiente.

Se $p(t)$ for pequeno, a população está livre para se reproduzir, e se $p(t)$ estiver próximo de k , o crescimento da população tem que parar.

O modelo de Verhulst é portanto

$$p'(t) = \left(r - \frac{r}{k}p(t)\right)p(t) \quad (7)$$

também conhecido como equação logística. A solução clássica desta ED é

$$p(t) = \frac{kp(0)}{p(0) + (k - p(0))e^{-rt}},$$

sendo $p(0)$ a população inicial.

A transformada de Laplace não é aplicável à equação 7. No entanto, podemos reescrever a equação como sendo

$$p'(t) - rp(t) = -\frac{r}{k}p^2(t),$$

e dividindo a ED por $p^2(t)$ obtemos

$$p^{-2}(t)p'(t) - rp^{-1}(t) = -\frac{r}{k},$$

ou ainda,

$$-p^{-2}(t)p'(t) + rp^{-1}(t) = \frac{r}{k},$$

e fazendo $u = p^{-1}$, chegamos a

$$u'(t) + ru(t) = \frac{r}{k}. \quad (8)$$

Note que agora podemos aplicar a transformada de Laplace para encontrar a solução da EDO. Vamos então generalizar esta equação também, para isto vamos considerar a versão fracionária da equação (8), na variável $u(t) = p^{-1}(t)$. Novamente teremos $0 < \alpha \leq 1$, desta forma a versão fracionária da equação logística é

$$u^{(\alpha)}(t) + ru(t) = \frac{r}{k}.$$

Encontraremos a solução dessa equação através do uso da transformada de Laplace, assim

$$\mathcal{L}\left(u^{(\alpha)}(t) + ru(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{r}{k}\right),$$

levando em conta os resultados das Proposições 2 e 15, temos

$$s^\alpha \mathcal{L}(u)(s) - s^{\alpha-1}u(0) + r\mathcal{L}(u)(s) = \frac{r}{ks},$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}(u)(s)(s^\alpha + r) = \frac{r}{ks} + s^{\alpha-1}u(0),$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u)(s) &= \frac{r}{ks(s^\alpha + r)} + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r}u(0) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{s} + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r} \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r}u(0). \end{aligned}$$

Para obter a solução vamos aplicar a transformada inversa de Laplace, e usando a Proposição 9, temos

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{s} + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r} \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r}u(0) \right) (t) \\ &= \frac{1}{k} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) (t) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r} \right) (t) \right) + u(0) \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r} \right) (t) \\ &= \frac{1}{k} (1 - E_\alpha(-rt^\alpha)) + u(0)E_\alpha(-rt^\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - E_{\alpha}(-rt^{\alpha}) + ku(0)E_{\alpha}(-rt^{\alpha})}{k} \\ &= \frac{1 + (ku(0) - 1)E_{\alpha}(-rt^{\alpha})}{k}. \end{aligned}$$

Como o que queremos é a solução $p(t)$ e não $u(t)$ e $u(t) = \frac{1}{p(t)}$, temos então

$$p(t) = \frac{kp(0)}{p(0) + (k - p(0))E_{\alpha}(-rt^{\alpha})},$$

solução da versão fracionária da equação diferencial de Verhulst.

Note que se $\alpha = 1$, da igualdade 2, voltamos a ter a solução do modelo clássico da equação logística

$$p(t) = \frac{kp(0)}{p(0) + (k - p(0))e^{-rt}}.$$

Assim, podemos concluir que esta versão fracionária nos fornece uma generalização do fenômeno.

4.2 Oscilador harmônico

A clássica equação de ordem 2

$$my''(t) + \lambda y'(t) + ky(t) = 0$$

descreve o deslocamento (elongação) de um corpo de massa m , no tempo t a partir da posição de equilíbrio, sujeito a uma força do tipo Hooke, $-ky(t)$, a uma força de amortecimento $-\lambda y'(t)$, em que λ e k são constantes positivas. Vamos considerar o caso particular desta equação onde não há atrito, isto é

$$my''(t) + ky(t) = 0,$$

cujas soluções são dadas por

$$y(t) = y(0) \cos(wt) + \frac{y'(0)}{w} \sin(wt),$$

sendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Vamos generalizar este problema considerando a equação de ordem $\alpha \in (1, 2]$

$$my^{(\alpha)}(t) + ky(t) = 0,$$

que podemos reescrever como

$$y^{(\alpha)}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$$

Encontraremos a solução desta equação aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da igualdade

$$\mathcal{L}(y^{(\alpha)}(t) + \frac{k}{m}y(t))(s) = 0,$$

pelos Proposições 2 e 15, conseguimos

$$\mathcal{L}(y^{(\alpha)}(t) + \frac{k}{m}y(t))(s) = \mathcal{L}(y^{(\alpha)})(s) + \frac{k}{m}\mathcal{L}(y)(s)$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}(y)(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) + \frac{k}{m}\mathcal{L}(y)(s),$$

organizando os termos, temos

$$\mathcal{L}(y)(s) \left(s^\alpha + \frac{k}{m} \right) = s^{\alpha-1}y(0) + s^{\alpha-2}y'(0),$$

ou ainda

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{k}{m}}y(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{k}{m}}y'(0).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e usando os resultados obtidos nas Proposições 9 e 10, chegamos à solução da EDO fracionária

$$y(t) = y(0)E_\alpha \left(-\frac{k}{m}t^\alpha \right) + y'(0)tE_{\alpha,2} \left(-\frac{k}{m}t^\alpha \right).$$

Analisando o caso quando $\alpha = 2$, como $\frac{k}{m} > 0$ temos diretamente das igualdades (3) e (5) que

$$y(t) = y(0) \cos(wt) + \frac{1}{w}y'(0) \sin(wt),$$

sendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A versão de ordem fracionária recupera a solução da versão de ordem inteira.

Referências

- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- HUMBERT, P.; AGARWAL, R. P.. Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations. **Bulletin des Sciences Mathématiques**. 77, p. 180-185, 1953.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTANA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and applications of fractional differential equations**. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- MITTAG-LEFFLER, M. G.. Sur la nouvelle fonction E_α **Comp. Rend. Acad. Sci. Paris**. 137, p. 554-558, 1903.
- OLIVEIRA, D. dos S. de **Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. 120 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- PODLUBNY, I. Fractional differential equations. **Mathematics in science and engineering**. 198, 1999.
- RAHIMY, M. Applications of fractional differential equations. **Applied Mathematical Sciences**. 50, p. 2453-2461, 2010.
- TIEPPO, S. M.; GUZZO, S. M.. Elementos do cálculo fracionário. **Jeepema: Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**. Maringá, p. 45-79. jul. 2018.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. Vol 1. 3ª edição. São Paulo: Makron Books, 2001.

O teorema fundamental do cálculo fracionário de Riemann-Liouville

Ana Carolina Souza Lisboa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
anacslisboa@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
smguzzo@gmail.com

Resumo: O cálculo fracionário é o ramo da matemática que estuda os conceitos de derivada e integral de ordem arbitrária. Estes conceitos são úteis para a modelagem matemática de fenômenos que envolvem equações diferenciais de ordem arbitrária. Neste trabalho daremos uma definição de derivada e de integral de ordem arbitrária e suas principais propriedades, assim como a versão do teorema fundamental do cálculo fracionário de Riemann-Liouville.

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Derivada fracionária; Teorema fundamental do cálculo fracionário.

1 Introdução

O conceito de cálculo fracionário, segundo Camargo e Oliveira (2015), teve origem no final do século XVII em uma troca de correspondências entre Gottfried Wilhelm Leibniz e Guillaume François Antoine, o marquês de l'Hôpital, que envolvia a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária. Quando l'Hôpital questiona Leibniz sobre qual deveria ser o significado de uma derivada de ordem $n = \frac{1}{2}$, isto é,

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}y(x),$$

Leibniz responde que para $y(x) = x$, a igualdade seria

$$d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx : x}.$$

A expressão está na notação da época, sendo difícil determinar precisamente o seu significado.

No século XVIII, Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange também contribuíram indiretamente para o estudo do cálculo fracionário. Foi somente a partir do século XIX que outros matemáticos como Pierre Simon de Laplace, Silvestre François Lacroix e Jean Baptista Joseph Fourier estudaram de maneira mais sistemática sobre o assunto. Laplace definiu uma derivada fracionária por meio de uma integral e Lacroix dedicou algumas páginas de um texto para um problema que visava obter a fórmula para a n -ésima derivada de monômios do tipo $y = x^m$. Fourier estudou sobre derivadas de ordens arbitrárias.

A primeira operação fracionária propriamente dita coube a Niels Henrik Abel, em 1823, que obteve a solução de uma equação integral. Joseph Liouville, atraído pela solução de Abel, estudou de forma a conseguir uma fórmula para derivada de ordem arbitrária.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, em 1847, escreveu um artigo no qual apresentou uma definição para a derivada fracionária. Após sua morte, foi publicado o trabalho em que usou uma generalização da série de Taylor para obter uma fórmula para a integral fracionária, atualmente conhecida como integral fracionária de Riemann-Liouville.

Segundo Camargo (2009), em 1969, Michele Caputo propôs uma nova definição para a derivada de ordem arbitrária, porém 24 anos depois reformulou tal definição através do livro *Lectures on Seismology and Rheological*.

Este trabalho trará alguns conceitos preliminares ao estudo do cálculo fracionário, contemplando a função gama e função beta, e ainda o estudo do cálculo fracionário na versão de Riemann-Liouville.

2 Cálculo fracionário

Antes de trazer os conceitos de cálculo fracionário, veremos alguns conceitos que são necessários para o trabalho com o cálculo fracionário. Dentre eles estão função gama e função beta.

A definição da função gama, segundo Camargo (2009), é atribuída a Leonhard Euler, que a propôs como uma função definida no conjunto dos números complexos. Entretanto, aqui estamos interessados apenas na definição dessa função em valores reais positivos. Esta função está bem definida, isto é, a integral impropria converge para qualquer que seja $x \in (0, \infty)$.

Definição 1. A função gama é a função que a cada número real positivo, $x > 0$, associa o número real representado por $\Gamma(x)$ e determinado por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ainda, esta função possui uma propriedade que a faz ser conhecida como generalização para o fatorial. Se $x > 0$, então

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Quando x é um número natural, se resume a um fatorial. Sua demonstração pode ser encontrada em Tieppo e Guzzo (2018).

Em seguida veremos um pouco sobre a função beta. Assim como a função gama, a definição também é atribuída a Euler. Apesar de ser definida a dois parâmetros complexos, aqui só estamos interessados a dois parâmetros reais, por isso faremos tais restrições. Esta definição também está bem definida.

Definição 2. A função beta é a função que, a cada $(u, v) \in \mathbb{R}$, faz corresponder o número

$B(u, v)$, dado por

$$B(u, v) = \int_0^\infty t^{u-1} (1+t)^{-u-v} dt.$$

Ainda, é possível escrever a função beta como

$$B(u, v) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2u-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta.$$

A seguir teremos uma proposição que relaciona a função beta com a função gama.

Proposição 3. *Se u e v são dois números reais positivos, então*

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Prova. Da definição da função gama, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt \int_0^\infty s^{v-1} e^{-s} ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} t^{u-1} s^{v-1} dt ds. \end{aligned}$$

Adotando $t = \rho \cos^2 \theta$ e $s = \rho \sin^2 \theta$, temos que quando $t = 0$, $\rho = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, e quando $t \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$, assim como quando $s = 0$, temos que $\rho = 0$ ou $\theta = 0$, e quando $s \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$. Ainda, temos que

$$\left| \frac{\partial(t, s)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = 2\rho \sin \theta \cos \theta$$

e

$$\left| \frac{\partial(\rho, \theta)}{\partial(t, s)} \right| = \frac{1}{2\rho \sin \theta \cos \theta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} t^{u-1} s^{v-1} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\rho \cos^2 \theta - \rho \sin^2 \theta} \rho^{u-1} (\cos \theta)^{2u-2} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-2} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-\rho} \rho^{u+v-1} (\cos \theta)^{2u-1} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-1} \frac{1}{2\rho \sin \theta \cos \theta} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-\rho} \rho^{u+v-1} (\cos \theta)^{2u-1} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-1} \left| \frac{\partial(\rho, \theta)}{\partial(t, s)} \right| dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-\rho} \rho^{u+v-1} (\cos \theta)^{2u-1} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta d\rho \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{u+v-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos \theta)^{2u-1} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2u-1} \rho^{v-1} (\sin \theta)^{2v-1} d\theta \cdot 2 \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{u+v-1} d\rho \\ &= \Gamma(u+v)B(u, v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

□

O próximo tópico que veremos é sobre integral de ordem inteira.

Definição 4. Seja f uma função integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [a, b]$. O operador integral de f em $[a, b]$ é denotado por $(Jf)(t)$ ou $J(f(t))$.

Isto é,

$$(Jf)(t) = \int_a^t f(s) \, ds.$$

Para $t, t_1 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (J(Jf))(t) &= \int_a^t (Jf)(t_1) dt_1 \\ &= \int_a^t \int_a^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1, \end{aligned}$$

desde que as integrais envolvidas existam em $[a, b]$. Denotamos $(J(Jf))(t)$ por $(J^{(2)}f)(t)$ e dizemos que a integral é de ordem 2.

Da mesma forma, para $t, t_1, t_2 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} (J(J(Jf)))(t) &= \int_a^t (J(Jf))(t_1) dt_1 \\ &= \int_a^t \int_a^{t_1} (Jf)(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1, \end{aligned}$$

desde que as integrais envolvidas existam em $[a, b]$. Denotamos $(J(J(Jf)))(t)$ por $(J^{(3)}f)(t)$ e dizemos que a integral é de ordem 3.

Seguindo com o mesmo raciocínio, se integrarmos n vezes, denotaremos $(J^{(n)}f)(t)$ e obteremos

$$(J^{(n)}f)(t) = \int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-2}} \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1,$$

desde que as integrais existam em $[a, b]$.

Proposição 5. (Identidade de Cauchy). Se f é uma função integrável em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Prova. A demonstração será feita por indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} (J^{(1)}f)(t) &= (Jf)(t) \\ &= \frac{1}{(1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(1-1)} f(s) ds \\ &= 1 \cdot \int_a^t (t-s)^0 f(s) ds \end{aligned}$$

$$= \int_a^t f(s)ds.$$

Supondo que seja válido para $n - 1$, isto é,

$$(J^{(n-1)}f)(t) = \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1-1)} f(s)ds,$$

para n obtemos

$$\begin{aligned} (J^{(n)}f)(t) &= (J(J^{(n-1)}f))(t) = \int_a^t (J^{(n-1)}f)(s)ds \\ &= \int_a^t \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau)d\tau ds \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau)d\tau ds. \end{aligned}$$

Note que $a \leq s \leq t$ e $a \leq \tau \leq s$. Assim, para alterar os limites de integração sem mudar a região de integração, s e τ devem ser $\tau \leq s \leq t$ e $a \leq \tau \leq t$. Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_a^s (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau)d\tau ds \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t \int_\tau^t (s-\tau)^{(n-1-1)} f(\tau)dsd\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (s-\tau)^{(n-1-1)}dsd\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \left[\frac{(s-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)} \right]_{s=\tau}^t d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \left[\frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)} - 0 \right] d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)} d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1-1)! \cdot (n-1)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{(n-1)}d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

□

Em seguida, temos a versão do Teorema Fundamental do Cálculo para derivadas e integrais de ordem superior.

Proposição 6. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e f é contínua em $[a, b]$, então

$$\frac{d^n}{dt^n}(J^n f)(t) = f(t).$$

Prova. A demonstração será feita por indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, temos

$$\frac{d^1}{dt^1}(J^{(1)}f)(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(s)ds = f(t).$$

Suponhamos que a igualdade seja válida para $n - 1$, isto é,

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(J^{(n-1)}f)(t) = f(t),$$

assim, para n obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(J^{(n)}f)(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(J^{(n)}f)(t) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{d}{dt}(J^{(n)}f)(t) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{d}{dt} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{df}{dt}(t-s)^{(n-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (n-1)(t-s)^{(n-1-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{(n-1)}{(n-1)(n-1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{1}{(n-1-1)!} \int_a^t (t-s)^{(n-1-1)} f(s) ds \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(J^{(n-1)}f)(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

□

Proposição 7. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e f é derivável de ordem n , com $f^{(n)}$ em $[a, b]$, então

$$\left(J^n \frac{d^n f}{dt^n}\right)(t) = (J^n f^{(n)})(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Prova. A demonstração será feita por indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} (J^{(1)}f^{(1)})(t) &= \int_a^t f^{(1)}(s) ds = f(t) - f(a) = f(t) - \frac{(t-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^0 \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(t) - \sum_{k=0}^{1-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \end{aligned}$$

Supondo válido para $n - 1$, ou seja,

$$(J^{(n-1)}f^{(n-1)})(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

para n obtemos

$$(J^{(n)}f^{(n)})(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Adotando $u = (t-s)^{n-1}$ e $dv = f^{(n)} ds$, assim $du = -(n-1)(t-s)^{n-1-1} ds$ e $v = f^{(n-1)}(s)$, portanto

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\left[(t-s)^{n-1} f^{(n-1)}(s) \right]_{s=a}^t - \int_a^t (n-1)(t-s)^{n-2} f^{(n-1)}(s) ds \right] \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\left[0 - (t-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) \right] + (n-1) \int_a^t (t-s)^{n-2} f^{(n-1)}(s) ds \right] \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \left[- (t-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + (n-1) \int_a^t (t-s)^{n-2} f^{(n-1)}(s) ds \right] \\
 &= - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-2} f^{(n-1)}(s) ds \\
 &= - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^t (t-s)^{n-2} f^{(n-1)}(s) ds \\
 &= - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (J^{(n-1)} f^{(n-1)})(t) \\
 &= - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\
 &= f(t) - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) \\
 &= f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) \\
 &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).
 \end{aligned}$$

□

Na sequência veremos a definição de integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville que decorre de uma adaptação da Identidade de Cauchy em que é substituído $(n-1)!$ por $\Gamma(n)$.

Definição 8. Suponha que $f(t)$ seja contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A integral de Riemann-Liouville de ordem α , com $\alpha > 0$, da função f é a função denotada por ${}_{RL}J_{a+}^{\alpha}(f)(t)$ ou por $({}_{RL}J_{a+}^{\alpha}f)(t)$ e definida por

$${}_{RL}J_{a+}^{\alpha}(f)(t) = ({}_{RL}J_{a+}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Como só estamos interessados em tratar dessa integral, a partir de agora omitiremos a simbologia “ ${}_{RL}$ ” quando falarmos da integral fracionária de Riemann-Liouville.

Proposição 9. (Derivada da integral de Riemann-Liouville). Se $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 \leq k < \alpha$, e f for contínua em $[a, b]$ então para qualquer $t \in [a, b]$ tem-se

$$\frac{d^k}{dt^k} (J_{a+}^{\alpha} f)(t) = (J_{a+}^{\alpha-k} f)(t).$$

Prova. A demonstração será feita por indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$, temos

$$\frac{d^0}{dt^0} (J_{a+}^{\alpha} f)(t) = (J_{a+}^{\alpha} f)(t) = (J_{a+}^{\alpha-0} f)(t).$$

Supondo válida para $n - 1$, isto é,

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(J_{a+}^{\alpha}f)(t) = \left(J_{a+}^{\alpha-(n-1)}f\right)(t) = \left(J_{a+}^{\alpha-n+1}f\right)(t),$$

para n obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}(J_{a+}^{\alpha}f)(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(J_{a+}^{\alpha}f)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(J_{a+}^{\alpha-n+1}f\right)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-n+1-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t \frac{d}{dt} (t-s)^{\alpha-n} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (\alpha-n)(t-s)^{\alpha-n-1} f(s) ds \\ &= \frac{(\alpha-n)}{(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-n-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-n-1} f(s) ds \\ &= \left(J_{a+}^{\alpha-n}f\right)(t).\end{aligned}$$

□

A demonstração da próxima proposição não será realizada, pois é uma consequência imediata da linearidade do operador integral.

Proposição 10. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in (0, \infty)$, então*

$$J_{a+}^{\alpha}(c_1f + c_2g) = c_1(J_{a+}^{\alpha}f) + c_2(J_{a+}^{\alpha}g),$$

para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Teorema 11. (Lei dos expoentes). Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então

$$J_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\beta}f) = J_{a+}^{\alpha+\beta}f = J_{a+}^{\beta}(J_{a+}^{\alpha}f).$$

Prova.

$$\begin{aligned}\left(J_{a+}^{\alpha}\left(J_{a+}^{\beta}f\right)\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-t_1)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(J_{a+}^{\beta}f\right)\right)(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-t_1)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{t_1} (t_1-t_2)^{\beta-1} f(t_2) dt_2\right) dt_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-t_1)^{\alpha-1} \int_a^{t_1} (t_1-t_2)^{\beta-1} f(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^{t_1} (t-t_1)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} f(t_2) dt_2 dt_1.\end{aligned}$$

Para mudar a ordem de integração, sem alterar a região, temos t_1 e t_2 tais que $a \leq t_2 \leq t$ e $t_2 \leq t_1 \leq t$, assim

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^{t_1} (t-t_1)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} f(t_2) dt_2 dt_1 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_{t_2}^t (t-t_1)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} f(t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t (t-t_1)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t (t-t_1+t_2-t_2)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t ((t-t_2)-(t_1-t_2))^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t \frac{(t-t_2)^{\alpha-1}}{(t-t_2)^{\alpha-1}} ((t-t_2)-(t_1-t_2))^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t (t-t_2)^{\alpha-1} \frac{((t-t_2)-(t_1-t_2))^{\alpha-1}}{(t-t_2)^{\alpha-1}} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t (t-t_2)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{(t_1-t_2)}{(t-t_2)}\right)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Adotando $w = \frac{(t_1-t_2)}{(t-t_2)}$, temos $dw = \frac{1}{(t-t_2)} dt_1$. Logo, $(t-t_2)dw = dt_1$ e $(t-t_2)w = (t_1-t_2)$. Ainda quando $t_1 = t_2$, temos $w = 0$. E quando $t_1 = t$, temos $w = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_{t_2}^t (t-t_2)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{(t_1-t_2)}{(t-t_2)}\right)^{\alpha-1} (t_1-t_2)^{\beta-1} dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_0^1 (t-t_2)^{\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1} ((t-t_2)w)^{\beta-1} (t-t_2) dw dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_0^1 (t-t_2)^{\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1} (t-t_2)^{\beta-1} w^{\beta-1} (t-t_2) dw dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) \int_0^1 (t-t_2)^{\alpha-1+\beta-1+1} (1-w)^{\alpha-1} w^{\beta-1} dw dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) (t-t_2)^{\alpha-1+\beta-1+1} \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^{\beta-1} dw dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) (t-t_2)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 w^{\beta-1} (1-w)^{\alpha-1} dw dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(t_2) (t-t_2)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\beta, \alpha) \int_a^t f(t_2) (t-t_2)^{\alpha+\beta-1} dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^t (t-t_2)^{\alpha+\beta-1} f(t_2) dt_2 \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-t_2)^{\alpha+\beta-1} f(t_2) dt_2 \\
 &= \left(J_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(t).
 \end{aligned}$$

□

Definição 12. Seja $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma

função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em (a, b) , então a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de f , definida em $[a, b]$ é a função dada por

$${}_{RL}D_{a+}^{\alpha}(f)(t) = ({}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(t) = \frac{d^n}{dt^n}(J_{a+}^{n-\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

A fim de simplificar a escrita, omitiremos “ $_{RL}$ ”, pois só trataremos de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville.

Proposição 13. *Sejam $k \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n-1 \leq \alpha < n$ e f uma função que possui derivada de ordem $(k+n)$ contínua em $[a, b]$. Então para todo $t \in [a, b]$ tem-se*

$$\frac{d^k}{dt^k}({}_aD_{a+}^{\alpha}f)(t) = ({}_aD_{a+}^{\alpha+k}f)(t).$$

Prova.

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}({}_aD_{a+}^{\alpha}f)(t) &= \frac{d^k}{dt^k} \frac{d^n}{dt^n} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(t) \\ &= \frac{d^{k+n}}{dt^{k+n}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(t) \\ &= \frac{d^{k+n}}{dt^{k+n}} (J_{a+}^{n-\alpha+k-k}f)(t) \\ &= \frac{d^{k+n}}{dt^{k+n}} (J_{a+}^{n+k-\alpha-k}f)(t) \\ &= \frac{d^{k+n}}{dt^{k+n}} (J_{a+}^{n+k-(\alpha+k)}f)(t) \\ &= ({}_aD_{a+}^{\alpha+k}f)(t). \end{aligned}$$

□

Teorema 14. (Fundamental do cálculo fracionário de Riemann-Liouville). Suponha $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então para qualquer $t \in [a, b]$, temos que

$${}_{RL}D_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\alpha}f)(t) = f(t),$$

se $({}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f)$ existe e for integrável, então

$$J_{a+}^{\alpha}({}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}(J_{a+}^{n-\alpha}f)(a).$$

Prova. Para a primeira igualdade, do Teorema 11 e da Proposição 6, temos

$$\begin{aligned} {}_aD_{a+}^{\alpha}(J_{a+}^{\alpha}f)(t) &= \frac{d^n}{dt^n}(J_{a+}^{n-\alpha}(J_{a+}^{\alpha}f))(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(J_{a+}^{n-\alpha+\alpha}f)(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}(J_{a+}^nf)(n) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Já para a segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\alpha}({}_{RL}D_{a+}^{\alpha})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ({}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(s) \, ds \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha} ({}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha} \frac{d^n}{ds^n} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right]. \end{aligned}$$

Adotando $u = (t-s)^{\alpha}$ e $dv = \frac{d^n}{ds^n} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds$, assim $du = -\alpha(t-s)^{\alpha-1}ds$ e $v = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s)$. Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha} \frac{d^n}{ds^n} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-s)^{\alpha} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \right]_{s=a}^t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t -\alpha(t-s)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[0 - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[- \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right]. \end{aligned}$$

De modo análogo, adotando $w = (t-s)^{\alpha-1}$ e $dr = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds$, temos $dw = -(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}ds$ e $r = \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s)$. Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[- \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[- \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) + \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \right]_{s=a}^t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t -(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[- \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[- \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-2} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha}f)(s) \, ds \right]. \end{aligned}$$

Repetindo a integração por partes $(n - 2)$ vezes, temos que

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^t (t - s)^\alpha \frac{d^n}{ds^n} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(s) ds \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[- \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) - \frac{(t - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \right. \\
 &\quad \left. - \dots - \frac{(t - a)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha - n + 2)} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)} \int_a^t -(\alpha - n + 1)(t - s)^{\alpha-n} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(s) ds \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(t - a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha - k + 2)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\alpha - n + 1)}{(\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-n} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(s) ds \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - s)^{(\alpha-n+1)-1} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(s) ds \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{(t - a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha - k + 2)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \right] \\
 &= \frac{d}{dt} (J_{a+}^{\alpha-n+1} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(t)) - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \frac{(t - a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha - k + 2)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \\
 &= \frac{d}{dt} (J_{a+}^1 f)(t) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \frac{(t - a)^{\alpha-k+1}}{\Gamma(\alpha - k + 2)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \\
 &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha - k + 1)(t - a)^{\alpha-k}}{(\alpha - k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a) \\
 &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t - a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (J_{a+}^{n-\alpha} f)(a).
 \end{aligned}$$

□

Referências

CAMARGO, Rubens Figueiredo e Oliveira, Edmundo Capelas de. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

CAMARGO, Rubens de Figueiredo. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. 71 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

TIEPPO, Sandra Maria; GUZZO, Sandro Marcos. Elementos do Cálculo Fracionário.

Jeepema: Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática. Maringá, p. 45-79. jul. 2018.

Preliminares matemáticos para compressão de dados: transformadas de Fourier

Laura Massuda Crema¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel
laura.crema@unioeste.br

Fabiana Magda Garcia Papani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Câmpus Cascavel
fgarciapapani@gmail.com

Resumo: Diversos conceitos matemáticos possuem aplicações na vida real. No mundo moderno, existe um grande volume de dados que precisam ser armazenados de modo a utilizar o mínimo de espaço possível. Para reduzir e reorganizar amostras de informação, podemos aplicar Transformadas de Fourier. Neste trabalho pretendemos estudar o que são as transformadas de Fourier e alguns casos específicos, como a Transformada Discreta de Fourier (DFT) e a Transformada Discreta do Cosseno (DCT), aplicando os resultados obtidos na compressão de imagens.

Palavras-chave: Transformadas de Fourier; compressão de imagens.

Introdução

Diariamente temos contato com arquivos comprimidos, sejam eles imagens, músicas ou documentos. Ao armazenar esses arquivos na memória de um computador, queremos ocupar o menor espaço possível, sem perdas de qualidade das informações. Assim, existe interesse em entender como construir uma informação (uma imagem ou onda sonora, por exemplo), através de amostras que ocupam menor espaço.

Para isso, podemos reorganizar as informações utilizando as Transformadas de Fourier, que são resultado do trabalho do matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier, que demonstrou que qualquer forma de onda pode ser representada por uma somatória de senóides e cossenóides de diferentes frequências, amplitudes e fases.

Neste trabalho, resultado da iniciação científica que está sendo desenvolvida pela discente no corrente ano, apresentamos brevemente alguns aspectos teóricos das Transformadas de Fourier e alguns casos específicos, como a Transformada Discreta de Fourier (DFT) e a Transformada Discreta do Cosseno (DCT). Pretendemos entender como essas transformações funcionam e observar algumas de suas aplicações, como a compilação de imagens no padrão JPEG (Joint Photographic Experts Group).

¹Bolsista do programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME-CNPq/CAPES

1 Transformações de Coordenadas

Nesta primeira seção, introduzimos conceitos referentes as transformações de coordenadas através de diversas definições da Álgebra Linear, que podem ser encontradas em Lima (2014), Lima (2006), Steinbruch e Winterle (1987) e Lipschutz (1994).

Definição 1 (Espaço Vetorial Complexo). Seja um conjunto E , cujos elementos chamamos de vetores, no qual definimos duas operações: a adição, que associa cada par de vetores $u, v \in E$ a um vetor $u + v$ (chamado soma de u e v); e a multiplicação por um número complexo, que associa cada número complexo α e cada vetor $v \in E$ a um vetor $\alpha v = \alpha \cdot v$ (chamado produto de α por v). Dizemos que E é um espaço vetorial complexo se as condições abaixo são satisfeitas para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $u, v, w \in E$.

- (i) $u + v = v + u$;
- (ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- (iii) existe um vetor $0 \in E$, chamado vetor nulo, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$;
- (iv) para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- (v) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- (vi) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
- (vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- (viii) $1v = v$

Definição 2 (Conjunto L.I.). Seja E um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente (L.I.) quando nenhum vetor $x \in X$ é combinação linear de outros elementos de X .

Definição 3 (Base de um espaço vetorial). Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ linearmente independente que gera E . Isto significa que todo vetor $v \in E$ pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos $v_1, \dots, v_m$ da base $\mathcal{B}$.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de E e $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, dizemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as coordenadas do vetor $v \in E$ na base $\mathcal{B}$.

Definição 4 (Aplicação). Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f é chamada aplicação de A em B se cada elemento $a \in A$ está associado com um único elemento de B . Denotamos:

$$f : A \rightarrow B.$$

Definição 5 (Transformação Linear). Sejam E e F espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K . Chamamos de transformação linear a aplicação $T : E \rightarrow F$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{Para quaisquer } u, v \in E, T(u + v) = T(u) + T(v).$$

$$\text{Sendo } k \text{ um escalar qualquer, } T(kv) = kT(v) \quad \forall v \in E.$$

Definição 6 (Funcional linear). Seja E um espaço vetorial sobre um corpo K . Chamamos a aplicação $\phi : E \rightarrow K$ de funcional linear se para quaisquer $u, v \in E$ e $a, b \in K$,

$$\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v).$$

Em outras palavras, um funcional linear de V é uma transformação linear de E em K .

Definição 7 (Operador linear). Seja E um espaço vetorial sobre um corpo K . Chamamos de operador linear a transformação linear $T : E \rightarrow E$. Em outras palavras, um operador linear é uma transformação linear do espaço vetorial E em si mesmo.

Definição 8 (Matriz Mudança de Base). Sejam $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ bases de um espaço vetorial E . Cada vetor de $\mathcal{B}$ pode ser escrito, de maneira única, como uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{C}$. Isto é,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ b_2 &= a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n \\ &\vdots \\ b_n &= a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n. \end{aligned}$$

Chamamos a matriz M de matriz de mudança de base ou matriz de transição, sendo M a transposta da matriz de coeficientes, ou seja, $M = [m_{ij}]$ com $m_{ij} = a_{ji}$.

2 Transformadas de Fourier

Neste seção, vamos definir série de Fourier e transformada de Fourier. Conforme Sodré (2003) e Pupin (2011), as séries de Fourier permitem representar funções periódicas como uma soma de exponenciais complexas, enquanto as transformadas de Fourier nos permitem o estudo de funções não-periódicas.

Inicialmente, vamos definir a transformada de Fourier e sua inversa.

Definição 9. Uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre $\mathbb{R}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Isto é, a função f é absolutamente integrável se a integral do valor absoluto de f sobre $\mathbb{R}$ é finita.

Definição 10 (Transformada de Fourier). Seja f uma função absolutamente integrável, pertencente a um espaço de funções. Para todo $\omega \in \mathbb{R}$, definimos a Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\omega} dt.$$

Por sua vez, a Transformada Inversa de Fourier é expressa por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{-it\omega} d\omega.$$

A prova deste fato pode ser encontrada em Candes (2016).

A transformada de Fourier é uma transformação linear.

Proposição 11. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$. Então*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Isto é, $\mathcal{F}$ é uma transformação linear.

Prova.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(af + bg)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-it\omega} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-it\omega} dt \\ &= a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega). \end{aligned}$$

□

Notemos que essa transformada é aplicável apenas em um domínio contínuo, enquanto as aplicações no mundo real nos fornecem um conjunto discreto de dados. Deste modo, definimos a série de Fourier como segue.

Definição 12. Seja x um número real. Definimos como exponencial complexa de x o número complexo

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Definição 13. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita periódica se existe um menor número real positivo P , denominado período fundamental, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = f(t + P).$$

Definição 14 (Série de Fourier). Seja f uma função de período P , definimos a Série de Fourier

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{P}}$$

sendo $\{c_n\}$ os coeficientes de Fourier de f , definidos por

$$c_n = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{P}} dt.$$

Iremos agora definir um conjunto de transformadas a partir da transformada de Fourier. Ao considerar as definições que apresentamos, o leitor deve entender que outros autores podem trazer algumas variações destas definições.

2.1 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

A seguinte definição da Transformada Discreta de Fourier unidimensional (e sua inversa) é apresentada por Pupin (2011) e Sundararajan (2001).

Definição 15 (Transformada Discreta de Fourier - 1D). Seja $x(n)$ uma sequência de números complexos com $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Definimos sua Transformada Discreta de Fourier (DFT) como sendo

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Sua inversa é

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}.$$

Sundararajan (2001) também define a Transformada Discreta de Fourier bidimensional e a transformada inversa correspondente.

Definição 16 (Transformada Discreta de Fourier - 2D). Seja X uma matriz de entrada de ordem N . Definimos sua Transformada Discreta de Fourier bidimensional (2D-DFT) como sendo

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) e^{\frac{2\pi i (n_1 k_1 + n_2 k_2)}{N}} \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Também definimos a transformada inversa

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X(k_1, k_2) e^{\frac{2\pi i (n_1 k_1 + n_2 k_2)}{N}} \quad n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N - 1.$$

A proposição abaixo nos garante que transformada discreta de Fourier (unidimensional) é uma transformação linear.

Proposição 17. *Sejam $x(n), y(n)$ vetores com N componentes, a, b constantes e $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Então*

$$\sum_{n=0}^{N-1} (ax(n) + by(n)) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} = aX(k) + bY(k).$$

Prova.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} (ax(n) + by(n)) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} &= a \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} + b \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \\ &= aX(k) + bY(k). \end{aligned}$$

2.2 Transformada Discreta do Cosseno (DCT)

As definições abaixo, para transformada unidimensional e bidimensional, são utilizadas por tanto por Schwartz e Pedrini (2003) quanto por Sundararajan (2001).

Definição 18 (Transformada Discreta do Cosseno - 1D). A Transformada Discreta do Cosseno unidimensional (1-D DCT) de um vetor real de entrada $x(n)$, composto por N elementos, é definida por

$$X(k) = C(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Sendo que

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Ademais, a inversa da DCT é definida como

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C(k) X(k) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}.$$

Definição 19 (Transformada Discreta do Cosseno - 2D). A Transformada Discreta do Cosseno bidimensional (2-D DCT) para uma matriz de entrada com ordem N é definida por

$$X(k_1, k_2) = C(k_1)C(k_2) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \cos \frac{\pi(2n_1+1)k_1}{2N} \cos \frac{\pi(2n_2+1)k_2}{2N}.$$

Com $k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1$ e

$$C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Também temos a sua inversa, definida como segue

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} C(k_1)C(k_2) X(k_1, k_2) \cos \frac{\pi(2n_1+1)k_1}{2N} \cos \frac{\pi(2n_2+1)k_2}{2N}.$$

2.3 Transformada Discreta do Seno (DST)

A definição abaixo é apresentada por Schwartz e Pedrini (2003).

Definição 20 (Transformada Discreta do Seno - 1D). Seja x um vetor de entrada com N componentes, onde $k = 0, 1, \dots, N-1$. Definimos sua Transformada Discreta do Seno, para o caso unidimensional, (1D-DST) como

$$X(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Podemos também definir a transformada inversa

$$x(n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{\pi(n+1)(k+1)}{N+1} \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Schwartz e Pedrini (2003) também definem a Transformada Discreta do Seno bidimensional.

Definição 21 (Transformada Discreta do Seno - 2D). Seja X uma matriz de entrada de ordem N . Definimos sua Transformada Discreta do Seno bidimensional (2D-DST) como sendo

$$X(k_1, k_2) = \frac{2}{N+1} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \sin \frac{\pi(n_1+1)(k_1+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(n_2+1)(k_2+1)}{N+1}.$$

Sendo $k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1$.

Também definimos a inversa dessa transformada

$$x(n_1, n_2) = \frac{2}{N+1} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X(k_1, k_2) \sin \frac{\pi(n_1+1)(k_1+1)}{N+1} \sin \frac{\pi(n_2+1)(k_2+1)}{N+1}.$$

3 Aplicações

A troca de dados e informações tornou-se uma ocorrência corriqueira para usuários da internet, que muitas vezes não têm consciência do volume de dados que circulam a cada instante. Para que o funcionamento da rede não seja prejudicado, é preciso comprimir dados para economizar espaço de armazenamento. De acordo com Lima Júnior (2007), a compressão de dados é uma codificação de informação de forma que o código gerado seja menor do que o código original. Ou seja, o resultado final do processo deve ocupar menos espaço, sendo o mais próximo possível do original. Nesta seção, descreveremos brevemente um dos algoritmos para compressão de imagens.

3.1 Compressão de Imagens no padrão JPEG

Quando falamos do armazenamento de imagens, um dos principais métodos de compressão é o JPEG, sigla para *Joint Photographic Experts Group* (Grupo de Especialistas em Fotografia Reunidos), amplamente utilizado em câmeras digitais e outros dispositivos de captura de imagem. Esse método foi projetado para comprimir imagens fotorrealistas, pois como

Rousseau e Saint-Aubin (2015) ressaltam, a maioria das fotografias consistem em gradientes e transições gentis, com poucas variações rápidas de cor. Desse modo, as perdas de informação que ocorrem no processo são imperceptíveis à visão humana.

Inicialmente, vamos reforçar que uma fotografia é dividida em *pixels*, pequenos pontos que formam uma imagem digital. Cada *pixel* pode ser associado a uma cor ou a um tom de cinza. Em fotografias coloridas, utiliza-se o sistema RGB (*red-green-blue*), onde as cores vermelho, verde e azul são combinadas para formar as demais cores. Cada *pixel* é associado com três valores de cor, cada um usando um valor de 8 *bits*, entre 0 e 255 (ou seja, utiliza-se 24 bits). Para fotos em preto e branco, utiliza-se uma escala de 256 tons cinza, onde cada tom é armazenado utilizando 8 *bits*. Nessa escala, 0 corresponde à cor preta e 255 corresponde à cor branca.

No método JPEG, em vez de processar a fotografia inteira de uma vez, ela é dividida em blocos de 8×8 *pixels*. Como fotos realistas têm poucas variações bruscas na cor, esses blocos terão *pixels* de tonalidades parecidas, tornando a perda de dados mais aceitável. Sabendo disso, Rousseau e Saint-Aubin (2015) dividem o algoritmo de compressão JPEG em quatro grandes passos: translação da função imagem; aplicação da Transformada Discreta do Cosseno nos blocos 8×8 ; quantização dos coeficientes transformados e ordenação em ziguezague e codificação dos coeficientes quantizados.

Dada uma função de imagem f , ela deve sofrer uma translação pela quantidade 2^{b-1} , onde b é o número de *bits* utilizados para representar cada pixel. Para amostrar os valores da imagem utilizando 8 *bits* ($b = 8$), obtemos a função transladada $\hat{f} = f - 128$ e deslocamos os valores mínimo e máximo em 128 *bits*. Após isso, a imagem é particionada em blocos de 8×8 *pixels* e a Transformada Discreta do Cosseno (DCT) deve ser aplicada em cada bloco.

Agora, a matriz de *pixels* obtida possui coeficientes reais. Para reduzir esses coeficientes aplica-se a quantização, transformando os coeficientes em números inteiros. A quantização é realizada através de uma matriz de quantização predeterminada pelo fabricante de *hardware* ou *software*. Como a matriz de quantização reduz a precisão de cada elemento da matriz dos coeficientes da imagem, ela influencia nos níveis de qualidade da imagem. Por fim, os coeficientes quantizados são ordenados em ziguezague. Isso porque os coeficientes não nulos tendem a aparecer no canto superior esquerdo de cada bloco, onde aparece o código “fim do bloco”.

Desse modo, para reconstruir um arquivo JPEG, cada bloco 8×8 é lido até o código “fim do bloco”, e o codificador pode “zerar automaticamente” as entradas faltantes. Após isso, “desfaz-se a quantização” e aplica-se então a inversa da Transformada Discreta do Cosseno nos blocos. Após corrigir a translação da imagem original, a imagem já está pronta para ser visualizada na tela.

Conclusões

Ao longo deste trabalho, estudamos alguns conceitos que não são vistos com frequência na grade do curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente apresentamos alguns conceitos

básicos da Álgebra Linear que nos permitiram estudar as Transformadas de Fourier, que são um tipo de transformação linear. Na sequência, vimos uma aplicação da Transformada Discreta do Cosseno na compressão de imagens no padrão JPEG, que em suma, utiliza uma transformação linear inversível para mapear uma imagem como um conjunto de coeficientes, que são quantizados e codificados. Como os coeficientes possuem pequena magnitude, podem ser removidos, reduzindo a informação sem distorção da imagem. Pretendemos continuar nossos estudos das Transformadas de Fourier e demais aplicações, analisando também a reconstrução de ondas sonoras.

Referências

- CANDES, Emmanuel. **Applied Fourier analysis and elements of modern signal processing**. 2016. Disponível em
<<https://statweb.stanford.edu/~candes/math262/hand.html>>. Acesso em: 28 set. 2019.
- LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIMA JÚNIOR, Nilson Teixeira de. **Compressão de Imagens (JPEG)**. 2007. Disponível em: <<http://www.eletrica.ufpr.br/marcelo/TE072/012007/Nilson-JPEG.pdf>>. Acesso em: 02 ago. 2019.
- LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. São Paulo: Makron Books, 1994.
- PUPIN, Josiana Rovatti. **Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens**. 2011. TCC - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em:
<<https://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/6/TCCJosiana.pdf>>. Acesso em: 02 ago. 2019.
- ROUSSEAU, Christiane; SAINT-AUBIN, Yvan. **Matemática e Atualidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. v. 2.
- SCHWARTZ, William Robson; PEDRINI, Hélio. **Aspectos Teóricos das Transformadas de Imagens**. 2003. Disponível em:
<https://homepages.dcc.ufmg.br/~william/papers/paper_2003_WICCGPI.pdf>. Acesso em: 02 ago. 2019.
- SODRÉ, Ulysses. **Transformadas de Fourier**. 2003. Disponível em:
<<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/tfourier.pdf>>. Acesso em: 09 ago. 2019.
- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. São Paulo: Makron Books, 1987.

SUNDARARAJAN, Duraisamy. **The Discrete Fourier Transform:** Theory, Algorithms and Applications. Singapore: World Scientific, 2001.

O trabalho com jogos no estágio supervisionado I

Karla Katrine Pereira Cazarotto
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
karla.kkpc@hotmail.com

Laura Massuda Crema
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
laura.crema@unioeste.br

Mariana Thais Garcia
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
mariana.garcia3@unioeste.br

Suenir Barreto dos Anjos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
suenir_anjos@hotmail.com

Arlení Elise Sella Langer
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
arlenisella@hotmail.com

Resumo: O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática (PROMAT), é um projeto desenvolvido pelo Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel e componente obrigatório da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática I, sendo um curso preparatório de matemática, que aborda conteúdos matemáticos da Educação Básica exigidos em vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), beneficiando estudantes atendidos pelo Núcleo Regional de Educação de Cascavel. Este trabalho busca fazer uma breve análise teórica a respeito das metodologias de ensino que fundamentaram os momentos da atuação das autoras como docentes no PROMAT. Em geral, buscamos apresentar as justificativas que nos levaram a utilizar os jogos como ferramenta de avaliação em uma sala de aula organizada para o trabalho com a Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Educação; Jogos no Ensino Médio; Resolução de Problemas.

1 Introdução

O estágio é parte crucial da formação de um aluno de licenciatura, pois é a ocasião em que assume o papel de docente e passa a enxergar as dinâmicas de sala de aula por uma nova perspectiva. Nesse momento, o estagiário passa a refletir sobre suas escolhas e repensar os encaminhamentos de sua prática. Enquanto as preocupações com o aprendizado dos alunos passam a ser inquietantes, também surge o desejo de se aprimorar constantemente. Desse modo,

o estágio “pode ser compreendido como um período de construção e reconstrução da identidade docente” (LANGER et al., 2011, p. 368).

Assim, no período de estágio, o licenciando passa a viver todas as experiências de um professor, aperfeiçoando suas habilidades de planejamento e antecipação, tornando-se capaz de interpretar as respostas de seus alunos e contornar eventuais obstáculos surgidos. Como parte de sua formação, cabe ao estagiário avaliar seus alunos, verificando se eles se apropriaram dos saberes trabalhados, para assim analisar sua postura como docente e corrigir eventuais falhas. Essa reflexão deve ser baseada nas respostas emitidas pelos alunos, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “a tarefa do avaliador constitui um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a atividade pedagógica.” (BRASIL, 1997, p. 41).

Dessa maneira, uma das preocupações naturais durante o estágio refere-se à postura adotada para evitar a resistência dos alunos aos saberes matemáticos e principalmente, tornar o processo avaliativo o mais confortável possível, levando em consideração as dificuldades pessoais que os indivíduos enfrentam e os fatores culturais que fazem com a Matemática seja vista como uma disciplina difícil, carregada de rigor e seriedade.

De fato, é impossível negar que as ideias tradicionais de avaliação em matemática envolvem provas e trabalhos, longos questionários que têm como prioridade “avaliar apenas se os alunos memorizam as regras e esquemas, não verificando a compreensão dos conceitos, o desenvolvimento de atitudes e procedimentos e a criatividade nas soluções” (BRASIL, 1998, p. 54). Essa concepção está ligada a um método de ensino “que prioriza a mecanização, a memorização e a abstração, distanciando-se de um aprendizado significativo” (BAUMGARTEL, 2016, p. 1).

2 Metodologia

Acreditando que a sala de aula deve ser um ambiente livre para “proposição, investigação e exploração de diferentes situações-problema por parte dos alunos” (SMOLE et al., 2008, p.11) e baseando-se na resolução de problemas como “metodologia pela qual o estudante tem oportunidade de aplicar conhecimentos matemáticos adquiridos em novas situações, de modo a resolver a questão proposta” (DANTE, 2003 apud PARANÁ, 2008, p. 63), podemos considerar plausível a opção de utilizar jogos como instrumento avaliativo.

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 20 de dezembro de 2017 pelo então ministro da Educação, Mendonça Filho, não podemos restringir a matemática à “quantificação de fenômenos” ou “técnicas de cálculo com os números e com as grandezas”, sendo “de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” (BRASIL, 2017, p. 265).

Entre as competências a serem desenvolvidas na disciplina de matemática, a BNCC propõe que o aluno seja capaz de

[...] interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2017, p. 267).

Conforme Bordeaux (1999 apud SANTOS, 2013, p. 4), “o momento de avaliação do aluno não deve se restringir à busca da ‘resposta certa’ obtida em um exercício escrito ou em um teste”. De fato, “não há sentido em processos avaliativos que apenas constatarem o que o aluno aprendeu ou não aprendeu e o fazem refém dessas constatações, tomadas como sentenças definitivas” (PARANÁ, 2008, p. 31), pois o processo de aprendizagem é constante e individual, ocorrendo de maneiras diversas e em tempos distintos para cada aluno. Assim, a escolha do uso de jogos como ferramentas avaliativas reforça a ideia de que “as formas de avaliação devem contemplar também as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não ficam evidentes nas avaliações escritas” (BRASIL, 1998, p. 55).

A intenção educativa do jogo (seja ela explícita ou implícita) associa-se ao fator recreativo, e “através do lúdico o educando estabelece relações entre os conteúdos já assimilados e novos” (SANTOS, 2013, p. 6). Assim, trazendo para a sala de aula situações interessantes e desafiadoras, os jogos despertam entusiasmo dos alunos, beneficiando o processo de ensino e aprendizagem

[...] visto que:

- o professor consegue detectar os alunos que estão com dificuldades reais;
- o aluno demonstra se o assunto foi bem assimilado;
- existe uma competição entre os jogadores e os adversários, pois todos desejam vencer e por isso aperfeiçoam-se e ultrapassam seus limites;
- durante o desenrolar de um jogo, observa-se que o aluno se torna mais crítico, alerta e confiante, expressando o que pensa, elaborando perguntas e tirando conclusões, sem necessidade da interferência ou aprovação do professor;
- não existe o medo de errar, pois o erro é considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta;
- o aluno se empolga com o clima de uma aula diferente, o que faz com que aprenda sem perceber. (MOTOKANE apud SANTOS, 2013, p. 5-6).

O trabalho com jogos também eleva a autoestima dos alunos envolvidos na atividade, pois ao descobrir “seu potencial de resolução de determinados problemas, especialmente os de raciocínio lógico, o aluno se sentirá realizado e motivado” (MENON; SILVA, 2016, p. 6). Ademais, os jogos permitem que o discente assuma uma “atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas” (BRASIL, 1998, p. 46). A mutabilidade dos jogos faz com que o erro deixe de ser algo insuperável para o jogador, “permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia” (SMOLE et al., 2008, p. 10).

A dinâmica tradicional é rompida quando o aluno se torna agente ativo na construção do conhecimento e o professor assume o papel de mediador da aprendizagem, instigando seus

alunos ao “pedir para que eles expliquem uma jogada, ou porque tomaram uma decisão e não outra” (SMOLE et al., 2008, p. 25). Desse modo, deve estar claro para o professor que, ao trabalhar com jogos, é natural ocorrer agitação e maior movimentação na sala de aula. Ao conceder autonomia ao discente, torna-se perceptível uma mudança na relação professor-aluno, pois ao trabalhar

[...] com os problemas convencionais, no momento da resolução, os alunos costumam perguntar quase que imediatamente qual algoritmo deve ser utilizado. Diferentemente, quando jogam, os alunos realizam cálculos mentais e antecipam resultados, pois existe um contexto maior, um significado, eles estão preocupados com o objetivo do jogo que se traduz em uma situação concreta. (ELORZA; FÜRKOTTER, 2016, p.7).

Assim, ao optar pelo trabalho com jogos, o docente precisa estar consciente que “o uso de jogos requer planejamento, pesquisa, organização e resignação por parte do professor para além da aula expositiva” (BAUMGARTEL, 2016, p. 7). É preciso enfrentar uma resistência a ludicidade, refletir sobre as intenções do jogo e quais as intervenções devem ser feitas pelo educador. Também é necessário adequar o jogo proposto ao número de alunos em sala de aula, e conforme Tonidandel (2012, p. 7), é necessário que as regras do jogo sejam simples e estejam claras para todos os envolvidos.

O planejamento inicia-se então com a escolha ou elaboração de um jogo, que deve ser feita de maneira cautelosa, pois há uma intencionalidade na atividade proposta além da competição. Assim, devem ser adotados alguns critérios na seleção dos jogos. Conforme Smole et al. (2008, p. 12), o jogo deve ser uma atividade coletiva, permitindo “que os alunos assumam papéis interdependentes, opostos e cooperativos”. Além disso, deve existir um objetivo claro a ser atingido através da elaboração de planos e uso de estratégias, considerando a existência de “regras preestabelecidas que não podem ser modificadas no decorrer de uma jogada” (SMOLE et al., 2008, p. 12).

É necessário cuidado para que os jogos não percam seu fator motivador, pois “desafiar um aluno significa propor situações que ele considere complexas, mas não impossíveis” (SADOVSKY, 2010 apud TONIDANDEL, 2012, p. 4). De acordo com Smole et al. (2008, p. 18), o docente deve evitar qualquer jogo que possa ser considerado “muito fácil, não apresentando desafios que façam os alunos aprenderem” ou que seja difícil a ponto de “que os alunos nem se encantem com ele porque não alcançam aquilo que se propõe”.

Após efetuar a escolha, o docente deve pensar no modo como trará esse jogo para a sala de aula, pois de acordo com Menon e Silva (2016, p. 10) “apresentar o jogo aos alunos será o primeiro passo para aguçar a sua curiosidade”. Para que todos os alunos participem da atividade, é preciso fornecer jogos (sejam eles de cartas ou de tabuleiro) suficientes para atender o número de alunos da turma, além de cópias impressas das regras. Para que os discentes joguem em grupo, as condições físicas da sala de aula podem exigir movimentação de carteiras, o que não é um obstáculo insuperável. A divisão dos grupos pode ser uma brecha para a intervenção do docente, que pode reorganizá-los em função das necessidades da turma, criando uma distribuição mais homogênea “para que não haja prepotência por parte de uns e sentimento de fracasso por parte de outros” (SMOLE et al., 2008, p. 22).

Como é inevitável intervir durante a realização da atividade, o professor deve estar atento à postura dos alunos, ouvindo suas sugestões e esclarecendo dúvidas. Ademais, considerando que “a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo” (BRASIL, 2017, p. 538), o docente precisa incentivar os alunos a realizarem anotações durante o jogo. Isto é, para que seja possível fruir do aspecto avaliativo dos jogos, é de fundamental importância a obtenção dos registros de jogadas ou cálculos efetuados pelos jogadores, pois “quem observa e lê as produções dos alunos tem informações importantes a respeito de suas aprendizagens” (SMOLE et al., 2008, p. 24).

A partir dos registros dos discentes, deve ser realizada uma discussão dos resultados obtidos, para que os jogos não tenham um “caráter puramente aleatório, tornando-se um ‘apêndice’ em sala de aula” (GRANDO, 2000 apud BAUMGARTEL, 2016, p. 6), mas possam cumprir seu papel como ferramentas avaliativas capazes de “levar em conta a progressão de desempenho de cada aluno, as características particulares da classe em que o aluno se encontra e as condições em que o processo de ensino e aprendizagem se concretiza” (BRASIL, 1998, p. 56). Conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular, ao compartilhar suas experiências no jogo “os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles” (BRASIL, 2017, p. 529).

Ao problematizar os jogos trabalhados, fica perceptível ao docente quais foram as aprendizagens dos alunos, quais foram suas dificuldades e dúvidas mais comuns. Essa discussão pode fazer com que os educandos reflitam suas jogadas, e com isso, reorganizem os saberes matemáticos envolvidos na atividade. Esse tipo de postura beneficia todos os indivíduos envolvidos no trabalho com jogos:

[...] ganha o professor porque tem possibilidade de propor formas diferenciadas de os alunos aprenderem, permitindo um maior envolvimento de todos e criando naturalmente uma situação de atendimento à diversidade, uma vez que cada jogador é quem controla seu ritmo, seu tempo de pensar e de aprender. Ganha o aluno que aprenderá mais matemática, ao mesmo tempo em que desenvolve outras habilidades que lhes serão úteis por toda a vida (SMOLE et al., 2008, p. 27).

Dessa maneira, o uso de jogos como ferramentas avaliativas na aula de matemática se adapta a diferentes ritmos de aprendizagem e está ligado à construção do conhecimento matemático e à perspectiva da resolução de problemas, sendo capaz de conciliar o “desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer” (BRASIL, 1997, p. 36), com a possibilidade de refletir e ressignificar conceitos e saberes a partir de erros cometidos.

Conclusões

Consideramos, sem dúvida que o grande “facilitador” durante o transcurso do trabalho no PROMAT foi a metodologia adotada. Sabendo que os alunos não se conheciam, os jogos atuaram como agentes socializadores. Além do entretenimento e socialização serviram para

introduzir, fixar e avaliar a aprendizagem de conceitos, transcendendo assim a simples ação lúdica.

Desse modo, pudemos avaliar não apenas se os alunos memorizam regras e esquemas, mas também analisar suas múltiplas maneiras de pensar. Assim, a prática por meio do estágio proporcionou a habituação de certas maneiras de atuar, por exemplo, o zelo de uma explicação de modo detalhado, além de poder constatar a importância de um bom planejamento de aula. Notamos que a prática docente é cheia de desafios e precisamos estar preparadas para superá-los, mas também percebemos quão prazerosa é a arte de ensinar.

Agradecimentos

Agradecemos aos nossos orientadores Arleni Elise Sella Langer e Clezio Aparecido Braga pelas palavras de apoio e incentivo, pela paciência, dedicação e pelos conselhos tão valiosos durante o período em que realizamos esse trabalho. Aos nossos pais e demais familiares pela compreensão, confiança e apoio nos momentos de dúvida e ansiedade, sempre nos dando forças para não desistir.

Agradecemos também a todos os amigos e colegas com quem pudemos compartilhar nossas angústias e alegrias, sempre encontrando um ombro amigo, e a nossos alunos do estágio pela dedicação, persistência e presença constante no projeto, que certamente contribuíram muito para nossa formação.

Referências

- BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016. Curitiba: **Anais...** Curitiba: UFPR, 2016. p. 1-8. Disponível em: <<http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2-priscila.baumgartel.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental (Matemática)**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

ELORZA, N. S. L.; FÜRKOTTER, M. O uso de Jogos no Ensino e Aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p. 1-12. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6973_3192_ID.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2019.

LANGER, A. E. S. et al. A Prática de Ensino e o Estágio Supervisionado no Curso de Matemática da Unioeste, campus de Cascavel. **Travessias**, Cascavel v. 5, n. 2, p. 365-379, 2011. Disponível em: <<http://e-revista.unioeste.br/index.php/travessias/article/view/5742/4328>>. Acesso em: 22 jul. 2019.

MENON, L. A.; SILVA, K. B. R. da. Os Jogos no Ensino da Matemática – Entre o Recreativo e o Lúdico. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Curitiba: SEED, 2016. p. 1-20. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_lucimariantoneli.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2019.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Secretaria de Estado da Educação: Curitiba, 2008.

SANTOS, M. A. dos. Jogos Matemáticos e o Processo de Avaliação. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Curitiba: SEED, 2013. p. 1-19. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uepg_mat_artigo_marileia_auer_dos_santos.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2019.

SMOLE, K. S. et al. **Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 1º a 3º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008. v. 3

TONIDANDEL, J. O uso de jogos auxiliando na aprendizagem de figuras planas no nono ano do Ensino Fundamental. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**. Curitiba: SEED, 2012. p. 1-16. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_unioeste_mat_pdp_jaimer_tonidandel.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2019.

Análise e descrição da dependência espacial de três propriedades químicas do solo

Fabiana Fatima Delabona¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
fabi.delabona@hotmail.com

Luciana Pagliosa Carvalho Guedes

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
luciana_pagliosa@hotmail.com

Resumo:

A geoestatística consiste em técnicas que não ignoram a localização geográfica e a dependência espacial dos dados na análise das características do solo, pois ao desconsiderar a dependência espacial, a análise dos dados fica mais vulnerável a erros, tornando-a menos precisa. Essas técnicas geoestatísticas foram aplicadas a um banco de dados em uma área agrícola comercial onde é praticada uma técnica de manejo localizado para o cultivo de soja afim de definir a estrutura espacial de três propriedades químicas do solo. Para isso, foram realizadas as análises estatísticas e a construção do semivariograma experimental para o estudo do comportamento dos dados, e a partir disso, após ajustar pelo método de máxima verossimilhança um modelo matemático, foi escolhido por meio de validação cruzada o semivariograma teórico que melhor representa a função semivariograma para então calcular o grau de dependência espacial presente em cada variável, as quais de fato apresentaram um certo grau de dependência espacial.

Palavras-chave: Dependência Espacial; Semivariância; Correlação Linear.

1 Introdução

A geoestatística, conhecida também como a Teoria das Variáveis Regionalizadas, surgiu através de Daniel G. Krige na África do Sul de forma empírica e posteriormente idealizada por G. Matheron, no início dos anos de 1960.

Com a geoestatística é possível realizar uma análise de variabilidade espacial, de modo que são retiradas amostras de variáveis georreferenciadas em diversas localizações para a observação de valores relacionados a determinado solo e suas características. Essas amostras podem possuir ou não influência sobre um local a ser estimado, não sendo necessariamente independentes entre si, sendo isso garantido pela autocorrelação (Landim, 2006).

Um dos destaques do uso da geoestatística é na agricultura de precisão que está cada vez mais presente na realidade do setor agrário. Neste conceito, os métodos geoestatísticos são aplicados no estudo de características relativas ao solo, como por exemplo, a concentração de determinado nutriente ou componente químico no solo.

¹Este trabalho teria sido possível sem o apoio financeiro da Fundação Araucária.

Perante as vantagens apresentadas pela geoestatística, foram aplicadas suas técnicas para o estudo das características e a análise do comportamento espacial de três propriedades químicas do solo, sendo elas o teor de carbono, cobre e ferro. Estes teores foram observados numa determinada área de manejo localizado de soja visando identificar e descrever a estrutura de dependência espacial por meio de um modelo para a função semivariância.

2 Materiais e Métodos

Foram coletadas 102 amostras de algumas propriedades químicas do solo na área em que se aplica a técnica de manejo localizado no cultivo de soja, essas propriedades são o teor de carbono, cobre e ferro (mg/dm^{-3}).

Para a análise de dependência espacial, foram realizados os cálculos de interpretação estatística, as quais tem o intuito de conhecer e resumir as variáveis em estudo. Dentre esses cálculos estão a média aritmética e o coeficiente de variação (Guimarães, 2004).

Além disso, foram realizados o teste de normalidade Shapiro Wilk com 5% de significância (Sturaro 2015) e o cálculo do coeficiente de correlação linear de Pearson que foi utilizado para analisar a presença ou falta de estacionariedade na média (tendência direcional na média).

Nas propriedades químicas do solo que apresentarem tendência direcional, esta será incorporada ao modelo geoestatístico, modelando a média por meio de uma regressão linear simples e regressão polinomial (Amaral et al., 2017). E assim, foi analisada a existência de dependência espacial pelos resíduos obtidos pela regressão.

Posteriormente, foi construído o semivariograma experimental, sendo uma ferramenta gráfica que representa a variabilidade e possui alguns parâmetros que são levados em consideração na análise dos dados. Para o cálculo do semivariograma experimental foi aplicado o estimador de Matheron (Equação 1) considerando um mínimo de 30 a 40 pares de pontos em cada distância estando elas ou não regularmente espaçadas (Landim, 2006).

$$2\gamma(h) = 1/N(h) \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(s_i + h) - Z(s_i))^2 \quad (1)$$

em que $\gamma(h)$ é o valor de semivariância; $N(h)$ é o número de pares de valores amostrados separados por uma distância h ; $Z(s_i + h)$ e $Z(s_i)$ são valores da variável regionalizada nas posições $s_i + h$ e s_i , respectivamente.

Com os dados obtidos por meio do estimador de Matheron, ajustou-se pelo método de máxima verossimilhança à função semivariância um modelo matemático que represente o semivariograma teórico. Os modelos considerados neste ajuste foram: exponencial, gaussiano e família Matérn (para $k = 1$; $k = 1.5$ e $k = 2$) (Teixeira, 2013).

Posteriormente, calculou-se o grau de dependência espacial (C_0/C), em que C_0 é o efeito pepita, C é o patamar (Guimarães, 2004).

A escolha do melhor modelo ajustado foi feita por meio da validação cruzada, feita de forma em que é retirada uma amostra do banco de dados e aplicada a krigagem no restante dos dados predizendo o valor da amostra retirada, sendo esse processo repetido para todas as amostras existentes.

Como critério para escolher o melhor modelo ajustado foram utilizados como parâmetros o erro médio (EM), erro médio reduzido (EMR) e o erro absoluto (EA) (Tabela 1). Além disso, foram calculadas as estimativas de parâmetros Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) (Emiliano, 2009).

Parâmetro	Fórmula
Erro médio	$EM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z(s_i) - \hat{Z}(s_i))$
Erro médio reduzido	$ER = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Z(s_i) - \hat{Z}(s_i)}{\sigma(\hat{Z}(s_i))}$
Erro Absoluto	$EA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(s_i) - \hat{Z}(s_i) $

Tabela 1: Parâmetros de escolha de melhor modelo de ajuste de semivariograma teórico (Guimarães, 2004). Em que n é o número de dados; $Z(s_i)$ é o valor observado no ponto s_i ; $\hat{Z}(s_i)$ é o valor predito por krigagem no ponto s_i ; $\sigma(\hat{Z}(s_i))$ é o desvio padrão da krigagem no ponto s_i .

Para desenvolver as rotinas necessárias para as análises estatísticas e geoestatística, foi utilizado o pacote geoR com o software R Studio (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2017).

3 Resultados e Discussão

Pelos cálculos de interpretação estatística do teor das propriedades químicas do solo, nota-se que tanto o teor de ferro, como o teor de cobre possuem uma dispersão média, enquanto o teor de carbono tem uma dispersão baixa (Tabela 2). Em média, tanto o teor de carbono como o teor de cobre estão altos, enquanto o teor de ferro possui uma quantidade média (Queiroz, 2011).

Pelo teste de normalidade Shapiro Wilk com 5% de significância, não pode ser rejeitada a hipótese nula de distribuição normal para o carbono e o ferro. Já para o cobre, a hipótese nula de distribuição normal pode ser rejeitada (Tabela 2).

Estatística	Carbono	Ferro	Cobre
Média	26,93	33,83	2,95
Coefficiente de Variação	12,05%	23,97%	27,86%
p-valor (Teste de normalidade)	0,15	6,38	0,0054
Correlação das coordenadas na direção X	-0,08	-0,23	-0,08
Correlação das coordenadas na direção Y	0,36	-0,33	-0,56

Tabela 2: Análise estatísticas do teor de carbono, ferro e cobre no solo (mg/dm^{-3}).

Ao analisarmos o valor do coeficiente de correlação linear entre as coordenadas na direção

X e o teor do carbono, nota-se que há a presença de correlação fraca e negativa (Tabela 2) pois o coeficiente apresentou valor negativo próximo à zero. Isso significa que enquanto o valor da coordenada aumenta, o teor de carbono no solo diminui.

Entre as coordenadas na direção Y e o teor de carbono no solo também há a presença de fraca correlação linear, porém, com valor positivo (Tabela 2), ou seja, enquanto as coordenadas aumentam o teor de carbono no solo também apresenta comportamento crescente.

Nota-se que os pontos do o teor de carbono no solo entre as coordenadas nas direções X e Y seguem uma tendência linear, podendo ser modelada por uma linha reta, em que pode ser aplicado um modelo de regressão linear simples para determinar a expressão matemática que representa a função semivariância. Logo, pela análise do gráfico de dispersão, há uma leve tendência direcional para o oeste e um pouco mais acentuada para o norte (Figura 1-a; Figura 1-b).

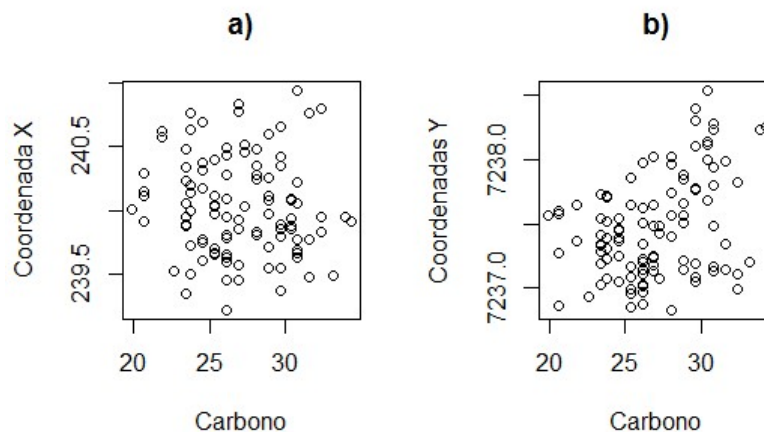


Figura 1: Gráfico de dispersão do teor de carbono no solo (a) nas coordenadas na direção X e (b) nas coordenadas na direção Y .

Para o cobre, entre as coordenadas na direção X e o teor de cobre há uma correlação linear fraca (Tabela 2) e entre as coordenadas na direção Y e o teor de cobre no solo, há uma correlação linear moderada (Tabela 2), porém, ao analisarmos o gráfico de dispersão (Figura 2-a; Figura 2-b) nota-se que os dados não apresentam comportamento linear nas coordenadas na direção Y , isso implica que não poderá ser modelada por uma função linear, ou seja, não será aplicado o método de regressão linear simples, que para este caso, será utilizado o modelo polinomial.

Como ambas as correlações apresentam valores negativos, conforme as coordenadas na direção X cresce o teor de cobre no solo decresce. Já para as coordenadas na direção Y , como não possui aspecto linear, inicialmente há decréscimo no teor dessa propriedade e depois possui um leve aspecto crescente. Portanto, nota-se que há leve tendência direcional para o oeste e com maior intensidade para o sul.

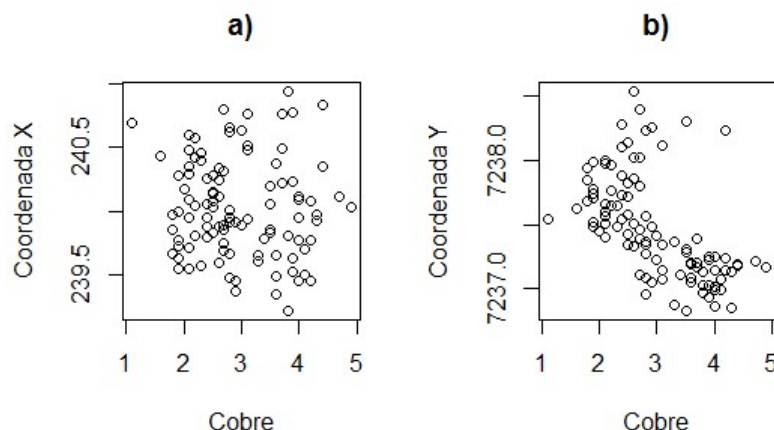


Figura 2: Gráfico de dispersão do teor de cobre no solo (a) nas coordenadas na direção X e (b) nas coordenadas na direção Y .

Entre as coordenadas em ambas as direções (X e Y), e o teor de ferro no solo há uma fraca correlação linear (Tabela 2). Como ambos os coeficientes de correlação apresentaram valores negativos, enquanto as coordenadas crescem, os valores correspondentes ao teor de ferro no solo decrescem. Logo, há uma leve tendência direcional para o oeste e sul (Figura 3-a; Figura 3-b).

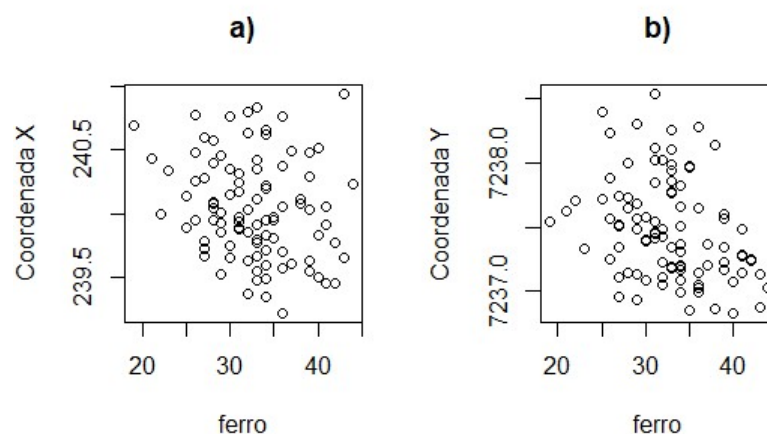


Figura 3: Gráfico de dispersão do teor de ferro no solo (a) nas coordenadas na direção X e (b) nas coordenadas na direção Y .

Com esses resultados, nota-se que os dados possuem tendência direcional, ou seja, seus valores seguem um padrão conforme o espaço em que se encontram, logo, para corrigir essa tendência, aplicou-se um modelo de regressão linear simples para os teores de carbono e ferro, e para o teor de cobre, foi utilizado o modelo de regressão polinomial (Amaral et al., 2017).

A Tabela 3 mostra as informações calculadas por meio do semivariograma experimental de Matheron para os resíduos dos teores de carbono, cobre e ferro no solo, em que o menor valor estimado da semivariância para todas as propriedades químicas foi na distância 0.088 km e o maior valor estimado para o carbono ocorreu na distância 0,706 km, enquanto para o cobre foi na distância 0,529 km e para o ferro na distância 0,882 km.

O número de pares recomendado em todas as distâncias ultrapassa o mínimo de 30 pares (Landim, 2006).

Propriedades	Distância (km)	Semivariância (mg/dm^{-3})	Pares
Carbono	0,088	6,141	73
	0,176	7,655	346
	0,264	8,652	218
	0,353	8,495	393
	0,441	9,931	512
	0,529	9,679	404
	0,618	10,269	528
	0,706	10,648	442
	0,794	9,473	435
	0,882	9,836	438
Cobre	0,088	0,234	73
	0,176	0,250	346
	0,264	0,332	218
	0,353	0,342	393
	0,441	0,316	512
	0,529	0,385	404
	0,618	0,316	528
	0,706	0,312	442
	0,794	0,327	435
	0,882	0,284	438
Ferro	0,088	16,74	66
	0,176	21,53	312
	0,264	22,73	195
	0,353	23,73	359
	0,441	22,88	470
	0,529	24,62	358
	0,618	24,35	476
	0,706	25,72	391
	0,794	26,11	391
	0,882	27,64	402

Tabela 3: Dados do semivariograma experimental dos resíduos dos teores de carbono, cobre e ferro (mg/dm^{-3}) no solo calculado pelo estimador de Matheron.

Para o resíduo de carbono, o valor do efeito pepita é de $6,141 \text{ } mg/dm^{-3}$, calculado na menor distância entre as amostras. O valor do patamar é de $10,648 \text{ } mg/dm^{-3}$. Para sabermos a contribuição, basta calcular a diferença entre o patamar e o efeito pepita, resultando, para o teor do resíduo de carbono no solo, em uma contribuição de $4,507 \text{ } mg/dm^{-3}$. O alcance consiste

na distância em que os valores de semivariância começam a se estabilizar, e neste caso, o alcance é atingido próximo de 0,618 km (Tabela 3).

Para o resíduo de cobre, o valor do efeito pepita é de $0,234 \text{ mg/dm}^{-3}$, e assim como para o carbono, também foi calculado na menor distância entre as amostras. O valor do patamar é de $0,385 \text{ mg/dm}^{-3}$, portanto, a contribuição para o resíduo do teor de cobre é de $0,151 \text{ mg/dm}^{-3}$. O alcance é atingido próximo à distância 0,353 km (Tabela 3).

Para o ferro, o valor do efeito pepita é $16,74 \text{ mg/dm}^{-3}$ também calculado na menor distância entre os pontos. O valor do patamar é de $24,62 \text{ mg/dm}^{-3}$ gerando uma contribuição de $7,5 \text{ mg/dm}^{-3}$. O alcance é atingido próximo à distância 0,353 km (Tabela 3).

Após a construção do semivariograma experimental calculado pelo estimador de Mathe-ron para os teores das propriedades químicas do solo, foram ajustados por máxima verossimi-lhança os modelos de semivariograma teórico Exponencial, Gaussiano e família Matérn ($k=1$, $k=1,5$ e $k=2$), sendo utilizado o método de validação cruzada para a escolha do melhor modelo que se ajusta à função semivariograma (Tabela 4).

Propriedade	Modelo	EM	EMR	EA	AIC	BIC
Carbono	Exponencial	0,0276	0,0151	2,8189	510,1	520,6
	Gaussiano	0,0130	0,0071	1,3354	510,8	521,3
	Matérn ($k = 1,0$)	0,0236	0,0129	2,4170	510,2	520,7
	Matérn ($k = 1,5$)	0,0213	0,0116	2,1762	510,3	520,8
	Matérn ($k = 2,0$)	0,0197	0,0108	2,0165	510,3	520,8
Cobre	Exponencial	-0,0016	-0,0024	40,147	173,3	183,8
	Gaussiano	-0,0002	-0,0003	40,141	172,8	183,3
	Matérn ($k = 1,0$)	-0,0010	-0,0016	40,204	172,3	182,8
	Matérn ($k = 1,5$)	-0,0009	-0,0014	40,227	172,1	182,6
	Matérn ($k = 2,0$)	-0,0008	-0,0013	40,235	172,1	182,6
Ferro	Exponencial	-0,029	-0,012	351,2	589,9	600,2
	Gaussiano	-0,063	-0,027	357,0	591,3	601,6
	Matérn ($k = 1,0$)	-0,019	-0,008	351,9	590	600,3
	Matérn ($k = 1,5$)	-0,015	-0,006	352,8	590,1	600,4
	Matérn ($k = 2,0$)	-0,013	-0,005	353,3	590	600,3

Tabela 4: Medidas de validação cruzada: erro médio (EM), reduzido (EMR) e absoluto (EA), e estimativas dos parâmetros AIC e BIC para os resíduos do teor de carbono, cobre e ferro no solo em cada modelo. Os valores em negrito correspondem aos menores valores dos parâmetros obtidos em cada modelo.

Nota-se que para o teor de carbono, o modelo ajustado que melhor representa o fenômeno é o Gaussiano (Equação 2) (Teixeira, 2013):

$$\gamma(h) = 5,511 + 4,991(1 - e^{(-3(h/0,254))^2}) \text{ para } h \neq 0 \quad (2)$$

Para o teor de cobre, tanto o modelo Exponencial, quanto os modelos Matérn para k

= 1,5 e para $k = 2,0$ empatam na quantidade de medidas com menor valor de ajuste e neste caso, o modelo escolhido será o Exponencial (Equação 3), pois apresentam os melhores valores de ajuste quanto aos erros e pouca diferença entre os parâmetros AIC e BIC (Tabela 4).

$$\gamma(h) = 0,102 + 0,534(1 - e^{(-3(h/0,463))}) \text{ para } h \neq 0 \quad (3)$$

E para o ferro, o modelo Exponencial é o que melhor representa o fenômeno (Equação 4).

$$\gamma(h) = 13,36 + 10,60(1 - e^{(-3(h/0,13))}) \text{ para } h \neq 0 \quad (4)$$

Estando ajustados os modelos experimentais de semivariograma, obtemos os valores exatos que correspondem ao efeito pepita, patamar, alcance e contribuição. Isso permite calcular o grau de dependência espacial das variáveis em estudo, e neste caso, tanto o resíduo dos teores de carbono como o de ferro apresentam dependência espacial moderada ($0,25 < C_0/C < 0,75$), enquanto o resíduo do teor de carbono apresenta fraca dependência espacial ($C_0/C < 0,25$) (Tabela 5).

Propriedades	C_0	C	C_1	a km	C_0/C
Carbono	5,511	10,50	4,991	0,254	0,52
Cobre	0,102	0,636	0,534	0,463	0,16
Ferro	13,36	23,96	10,60	0,13	0,56

Tabela 5: Efeito pepita (C_0), patamar (C), contribuição (C_1), alcance (a) e cálculo do grau de dependência espacial (C_0/C) dos resíduos de carbono, cobre e ferro (mg/dm^{-3}).

Tendo o semivariograma experimental do resíduo das três propriedades químicas do solo ajustados pelos modelos teóricos que melhor representam os fenômenos, é construído o gráfico do modelo de semivariograma experimental ajustado para cada uma das propriedades (Figura 4).

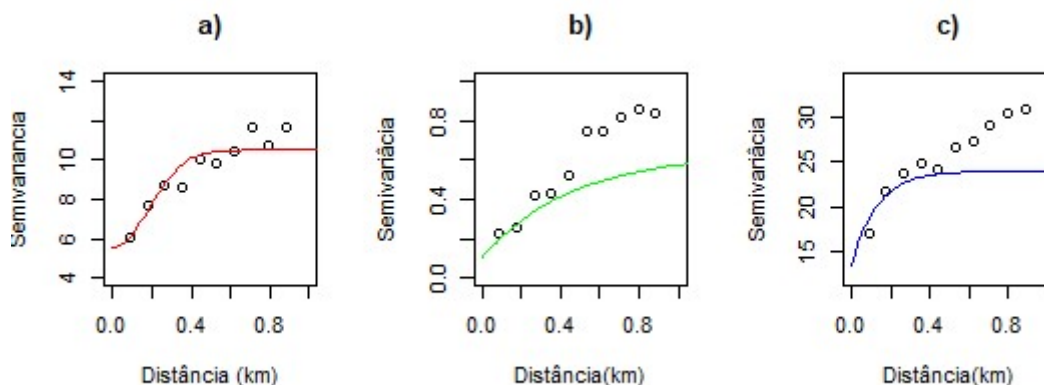


Figura 4: Semivariograma experimental de Matheron das propriedades químicas do solo (mg/dm^{-3}) ajustados pelos semivariogramas teóricos (a) Gaussiano para o resíduo de carbono e Exponencial para os resíduos de (b) cobre e (c) ferro.

Conclusões

Na análise de dependência espacial realizada, o objetivo foi descrever a estrutura de dependência espacial do teor de três componentes químicos do solo, sendo eles os teores de carbono, cobre e ferro, os quais de fato apresentaram dependência espacial do tipo moderado, em que não houve presença de efeito pepita puro e o semivariograma não é constante ao patamar para as três propriedades químicas.

Referências

Amaral, G. D.; Silva, V. L.; Reis, E. *Análise de Regressão Linear no Pacote R*, 2017.

Emiliano, P. C. **Fundamentos e aplicações dos critérios de informação: Akaike e Bayesiano**. 2009. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Guimarães, E. C. *Geoestatística básica e aplicada*. Uberlândia, 2004. Universidade Federal de Uberlândia.

Journel, A. G; Huijbregts, J.C.H. **Mining geostatistics**. London: Academic Press, 1978.

Landim, P. M. B. Sobre geoestatística e mapas. **Terrae Didatica**, Rio Claro, V. 2, n. 1, p. 19-33, 2006.

Queiroz, F. N. D. **Atributos químicos e físicos do solo e produtividade de soja em agricultura convencional e de precisão**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel.

R Development Core Team. (2017). R: a language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**. Vienna. Disponível em <http://www.R-project.org>. Acesso em: 15 set. 2019.

Sturaro, J. R. Apostila de geoestatística básica UNESP. Rio Claro; 2015 Departamento de Geologia Aplicada-IGCE.

Teixeira, M. B. R. **Comparação entre estimadores de semivariância**. 2013. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Construção dos números reais via cortes de Dedekind

Igor Alipio Bresola Carabolante¹

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
guitio@hotmail.com

Daniela Maria Grande Vicente

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
danigrande.math@gmail.com

Resumo: Neste artigo é apresentada a construção de $\mathbb{R}$ a partir dos cortes de Dedekind, os quais são definidos considerando como válidas todas as propriedades referentes a $\mathbb{Q}$ e em seguida, são definidas as operações entre cortes e enunciados alguns teoremas que mostram as propriedades de $\mathbb{R}$ sendo válidas nos cortes. Após isso, é exibido o conceito de corpo, com foco no corpo dos números reais, enunciado e demonstrado o Teorema de Dedekind, encerrando com a apresentação da completude de $\mathbb{R}$.

Palavras-chave: Números Reais; Cortes de Dedekind; Teorema de Dedekind.

1 Introdução

É observado que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não contempla alguns números como $\sqrt{2}$, π , isto é, números irracionais, de modo que surge a necessidade de um conjunto que englobe tanto os números racionais quanto os irracionais. Este é o conjunto dos reais, ou $\mathbb{R}$, sendo que uma das formas de construir tal conjunto é através dos Cortes de Dedekind.

Em 1872, Richard Dedekind, publicou sua obra mais famosa *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* onde tratou da construção do conjunto dos números reais de forma rigorosa. Essa construção é conhecida como construção dos números reais por Cortes de Dedekind. O conceito de corte nada mais é do que um subconjunto de $\mathbb{Q}$, satisfazendo algumas propriedades específicas e tendo características e operações bem definidas. Dentre as operações entre cortes, destacam-se a adição e a multiplicação, responsáveis por caracterizar o conjunto dos cortes como um corpo, o que é fundamental para a construção dos números reais.

Inicialmente será definido precisamente o que são Cortes de Dedekind, demonstrando algumas características desses subconjuntos. Posteriormente, serão enunciados teoremas para provar que é possível realizar operações como adição e multiplicação entre cortes e também que as propriedades presentes em $\mathbb{Q}$ se mantêm no conjunto dos cortes. Será definido então o que é um corpo, mostrando que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, enquanto que $\mathbb{Q}$ não.

¹Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da Bolsa que possibilitou a realização desse estudo.

2 Cortes de Dedekind

Nesta seção trataremos de alguns conceitos e definições das quais faremos uso no decorrer do trabalho. As definições e resultados aqui descritos podem ser encontrados em Rudin (1964).

Definição 1. São ditos cortes, todo subconjunto $\alpha \in \mathbb{Q}$, que satisfazer as seguintes condições:

- (i) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- (ii) Seja $q \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \alpha$ e $q < p$, então $q \in \alpha$.
- (iii) α não possui maior elemento em $\mathbb{Q}$.

Em síntese, um corte contém pelo menos um número racional, mas não todos, e todo elemento do corte é menor do que qualquer outro racional que não esteja contido no corte.

Teorema 2. *Sejam α um corte e $p, q \in \mathbb{Q}$ tais que $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$. Então $p < q$.*

Prova. Supondo o contrário, isto é, $q \leq p$. De (ii) temos que $q \in \alpha$, o que é uma contradição, e assim, está provado o teorema por absurdo. $\square$

Da definição acima podemos observar que qualquer racional q determina um corte, pois pode-se considerar um conjunto α contendo todos os números racionais menores do que q . É de fácil visualização que α satisfaz as condições (i) e (ii). Para demonstrar a condição (iii), consideramos $p \in \alpha$, ou seja, $p < q$. Podemos escrever

$$p < \frac{p+q}{2} < \frac{q+q}{2} = q,$$

e isto implica que para todo $p \in \alpha$, existe um elemento $(p+q)/2 \in \alpha$ maior que p , e logo, não há maior elemento em α .

Exemplo 1. O subconjunto $\alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 3\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$ é um corte, pois satisfaz todas as três propriedades, entretanto, não é determinado por um número racional, e sim, por um irracional, a saber $\sqrt{3}$.

Dizemos em geral, que um corte racional é todo corte determinado por um número racional, ou ainda, em linguagem matemática, seja $q \in \mathbb{Q}$, definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < q\}$, um corte racional. Todo corte que não for racional, será dito irracional, assim como o corte determinado por $\sqrt{3}$.

Estabeleceremos agora a igualdade entre dois cortes: dados os cortes α e β , escrevemos $\alpha = \beta$ toda vez que se $p \in \alpha$, tivermos $p \in \beta$, e simultaneamente, se $q \in \beta$, então $q \in \alpha$, ou seja, os dois conjuntos são idênticos, caso contrário, escreveremos $\alpha \neq \beta$.

Exemplo 2. Sabemos que $(1/2)^* = (2/4)^*$, pois o corte $(1/2)^*$ contém todos os números racionais menores que $1/2$ e o corte $(2/4)^*$ contém exatamente os mesmos elementos, logo, os cortes são idênticos.

Também estabeleceremos uma relação de ordem no conjunto dos cortes. Diremos que $\alpha < \beta$ sempre que α for um subconjunto próprio de β , isto é, se dado um elemento p , tal que $p \in \beta$, tivermos $p \notin \alpha$, o que é o equivalente a dizer que o número r que determina o corte β é maior do que o número s que determina o corte α . Além disso, $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$.

Dizemos que um corte α é positivo, se $\alpha > 0^*$, e negativo se $\alpha < 0^*$, ou ainda, dizemos que α é não negativo se $\alpha \geq 0^*$, e não positivo se $\alpha \leq 0^*$.

2.1 Operações entre cortes e propriedades

Agora que o conceito de corte foi introduzido, serão enunciados e demonstrados alguns teoremas, que mostram como as operações e relações de ordem entre cortes são definidas.

Teorema 3. (*Tricotomia*) *Dados α e β cortes, encontramos $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$, e somente uma das afirmações é verdadeira.*

Prova. Pela definição de igualdade entre cortes, $\alpha = \beta$ implica que nenhuma das outras duas opções são válidas. Agora suponha por absurdo que $\alpha > \beta$ e $\beta > \alpha$ simultaneamente. De $\beta > \alpha$, existe p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$, além disso, de $\alpha > \beta$, existe q tal que $q \in \alpha$ e $q \notin \beta$. Como $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, então $q > p$, mas como $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$, então $p > q$, o que é impossível para os números racionais, e assim, obtemos uma contradição, e portanto, fica demonstrado o teorema para os três casos. $\square$

Teorema 4. (*Transitividade*) *Sejam α , β e γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*

Prova. De $\alpha < \beta$, há um certo p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. De $\beta < \gamma$, há um certo q tal que $q \in \gamma$ e $q \notin \beta$. Como $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, então $p < q$. Como $p \notin \alpha$, então $q \notin \alpha$. O fato de $q \notin \alpha$ e $q \in \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$, como queríamos demonstrar inicialmente. $\square$

Teorema 5. (*Adição*) *Sejam α e β cortes. Seja γ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então γ é um corte.*

Prova. Para realizar a demonstração, devemos verificar se γ satisfaz as três condições necessárias para um subconjunto de $\mathbb{Q}$ ser considerado um corte:

- (i) É fácil ver que $\alpha \neq \emptyset$. Dados s e t tais que $p < s$ para todo $p \in \alpha$ e $q < t$ para todo $q \in \beta$. Temos que $p + q < s + t$, ou seja, $s + t \notin \gamma$ e portanto $\gamma \neq \mathbb{Q}$.
- (ii) Suponhamos que $r \in \gamma$, $s < r$, com $s \in \mathbb{Q}$. Como $s < r$, então $s - q < p$, assim, $s - q \in \alpha$ e $s = (s - q) + q \in \gamma$.
- (iii) Suponhamos que $r \in \gamma$. Existe um número $s \in \alpha$, tal que $s > p$, sendo que $s + q > r$, e $s + q \in \gamma$, ou seja, r não é o maior racional em γ .

$\square$

Definimos o conjunto γ como sendo a soma entre os cortes α e β , isto é, $\gamma = \alpha + \beta$. A comutatividade e associatividade da adição entre cortes decorre das mesmas propriedades aplicadas aos números racionais em si. Outra propriedade interessante da adição entre cortes é que $\alpha + 0^* = \alpha$, ou seja, 0^* é um elemento neutro da adição entre cortes. Isso será demonstrado:

Seja $r \in \alpha + 0^*$. Logo $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$ (isto é, $q < 0$). Assim, $p + q < p$, de modo que, $p + q \in \alpha$ e $r \in \alpha$. Portanto, $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Reciprocamente, suponhamos que $r \in \alpha$ e tomemos $s \in \alpha$ com $s > r$. Então $r - s \in 0^*$ e $r = s + (r - s) \in \alpha + 0^*$. Portanto $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Assim, $\alpha + 0^* = \alpha$.

Teorema 6. *Seja α um corte. Existe um único corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

Definição 7. O corte β construído no Teorema 6 é chamado de simétrico de α e será denotado por $-\alpha$.

Teorema 8. *(Cancelamento) Sejam α , β e γ cortes.*

(i) *Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, então $\beta = \gamma$;*

(ii) *Se $\beta < \gamma$, então $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Em particular, tomando $\beta = 0^*$, temos $\alpha + \gamma > 0^*$ se $\alpha > 0^*$ e $\gamma > 0^*$.*

Prova. (i) $\beta = 0^* + \beta = (-\alpha + \alpha) + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma) = (-\alpha + \alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma$.

(ii) Decorre diretamente das definições de desigualdades e soma no conjunto dos cortes.

□

Teorema 9. *Sejam α e β cortes, então existe um e somente um corte γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.*

Prova. Sejam dois cortes γ_1 e γ_2 com $\gamma_1 \neq \gamma_2$, então $\alpha + \gamma_1 \neq \alpha + \gamma_2$ do Teorema 8. Então, existe no máximo um corte γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.

Tomando $\gamma = \beta + (-\alpha)$, assim

$$\alpha + \gamma = \alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0^* + \beta = \beta.$$

□

Definição 10. O corte γ construído no Teorema 9 será denotado por $\beta - \alpha$. Em outras palavras, escrevemos $\beta - \alpha$ em vez de $\beta + (-\alpha)$.

Discutimos até então, as operações de adição e subtração de cortes. Definiremos agora a operação de multiplicação no conjunto dos cortes.

Teorema 11. *(Produto) Sejam α e β cortes não negativos. Seja γ o conjunto de todos os racionais $r = pq$, em que $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Então γ será um corte.*

Diremos que γ é o produto de α e β , e representaremos como $\alpha \cdot \beta$. Como a definição abrange apenas cortes positivos, temos as seguintes definições para $\alpha \cdot \beta$: $(-\alpha) \cdot (-\beta)$, para $\alpha, \beta < 0^*$, $-[(-\alpha) \cdot \beta]$ para $\alpha < 0^*$ e $\beta \geq 0^*$ e $-[\alpha \cdot (-\beta)]$ para $\alpha \geq 0^*$ e $\beta < 0^*$.

Teorema 12. Para α, β e γ , cortes quaisquer, valem as seguintes propriedades:

- (i) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
- (ii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;
- (iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;
- (iv) $\alpha \cdot 0^* = 0^*$;
- (v) $\alpha \cdot \beta = 0^*$ se, e somente se, $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$;
- (vi) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$;
- (vii) Se $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.
- (viii) Dado $\alpha \neq 0^*$, existe α^{-1} tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*$.

Teorema 13. Quaisquer que sejam os racionais p e q , temos:

- (i) $p^* + q^* = (p + q)^*$;
- (ii) $p^* \cdot q^* = (p \cdot q)^*$;
- (iii) $p^* < q^*$ se, e somente se, $p < q$.

Prova. (i) Se $r \in p^* + q^*$, então $r = s + t$, com $s < p$, $t < q$, de modo que $r < p + q$. Assim, $r \in (p + q)^*$. Se $r \in (p + q)^*$, então $r < p + q$. Sejam $h = p + q - r$, $s = p - h/2$ e $t = q - h/2$. Logo $s \in p^*$, $t \in q^*$ e $r = p + q - h = (p - h/2) + (q - h/2) = s + t$, de modo que $r \in p^* + q^*$.

(ii) Análogo ao item (i).

(iii) Se $p < q$, então $p \in q^*$. Mas $p \notin p^*$, de modo que $p^* < q^*$. Se $p^* < q^*$, existirá um racional r tal que $r \in q^*$, com $r \notin p^*$. Portanto, $p \leq r < q$, de modo que $p < q$.

□

Teorema 14. Sejam α e β cortes tais que $\alpha < \beta$, então existirá um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.

Prova. Se $\alpha < \beta$, então existirá um racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Escolhamos $r > p$ de modo que $r \in \beta$. Como $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, temos $r^* < \beta$. Como $p \in r^*$ e $p \notin \alpha$, temos $\alpha < r^*$. □

Teorema 15. Qualquer que seja o corte α , teremos $p \in \alpha$ se, e somente se, $p^* < \alpha$.

Prova. Seja α um corte. Suponhamos que $p \in \alpha$. Como $p \notin p^*$, vale $p^* < \alpha$. Reciprocamente, seja $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p^* < \alpha$. Então existe um racional q tal que $q \in \alpha$ e $q \notin p^*$. Assim, $q \geq p$, donde concluímos que $p \in \alpha$, pois $q \in \alpha$. □

3 O corpo dos números Reais

Nesta seção apresentaremos algumas definições das quais faremos uso, tais definições podem ser encontradas em Lima (1995).

Um *corpo* é um conjunto K não vazio, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem as condições abaixo. A adição faz corresponder a cada par de elementos x e y pertencentes a K sua soma $x + y \in K$, e a multiplicação o seu produto $x \cdot y \in K$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) (*Associativa da adição*) para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (ii) (*Comutativa da adição*) para quaisquer $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$;
- (iii) (*Elemento neutro da adição*) existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, qualquer que seja $x \in K$;
- (iv) (*Elemento simétrico da adição*) todo elemento $x \in K$, possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$;
- (v) (*Associativa da multiplicação*) para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- (vi) (*Comutativa da multiplicação*) para quaisquer $x, y \in K$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$;
- (vii) (*Elemento neutro da multiplicação*) existe $1 \in K$, tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$;
- (viii) (*Elemento inverso da multiplicação*) todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} , tal que $x \cdot x^{-1} = 1$;
- (ix) (*Distributiva da multiplicação*) para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Através dessa definição, podemos dizer que $\mathbb{Q}$ é um corpo, já que satisfaz todas as propriedades acima citadas. Também o conjunto dos cortes com as operações de adição e multiplicação entre cortes, definidos na seção anterior, é um corpo. Uma vez que tais operações entre cortes satisfazem os axiomas de corpo. Denotaremos o conjunto dos cortes como $\mathbb{R}$, e será chamado de corpo dos números reais.

Definição 16. (Corpo ordenado) Um corpo ordenado é um corpo K , onde existe $P \subset K$, chamado conjunto dos elementos positivos de K , tal que

- i) Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.
- ii) Dado $x \in K$, ou $x \in P$, ou $-x \in P$, ou $x = 0$.

Definição 17. Num corpo ordenado K , escrevemos $x < y$, lê-se: x é menor do que y , quando $y - x \in P$.

Definição 18. Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado superiormente quando existe $y \in K$ tal que $y \geq x$ para todo $x \in X$, e chamamos y de *cota superior* de X .

Definição 19. Seja K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $y \in K$ chama-se supremo de X quando y é a menor das cotas superiores de X . Assim é preciso que se cumpra as seguintes propriedades:

- i) para todo $x \in X$, tem-se $x \leq y$;
- ii) se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $y \leq c$.

Denotaremos y por $\sup X$.

4 $\mathbb{R}$ é completo

Nesta seção mostraremos que o conjunto dos números reais é completo. Para isso, faremos a demonstração de alguns resultados começando com o Teorema de Dedekind.

Teorema 20. (Dedekind) *Sejam A e B conjuntos de números reais satisfazendo*

- (a) *todo número real está em A ou em B ;*
- (b) *nenhum número real está em A e em B simultaneamente;*
- (c) *A e B não são vazios;*
- (d) *se $\alpha \in A$, e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.*

Então existe um, e somente um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$, e $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$.

Prova. Suponha que há dois números, γ_1 e γ_2 satisfazendo as condições dadas, tais que $\gamma_1 < \gamma_2$. Existe γ_3 , tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, e isto é garantido pelo Teorema 14. Então $\gamma_3 < \gamma_2$ implica que $\gamma_3 \in A$, enquanto que $\gamma_1 < \gamma_3$ implica que $\gamma_3 \in B$. Isso contradiz a hipótese (b), portanto existe no máximo um número γ satisfazendo as propriedades dadas.

Seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Precisamos verificar se γ satisfaz a definição de corte.

- (i) Como A não é vazio, γ também não será. Se $\beta \in B$ e $q \notin \beta$, então $q \notin \alpha$, para qualquer $\alpha \in A$; assim $q \notin \gamma$.
- (ii) Se $p \in \gamma$ e $q < p$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, $q \in \alpha$ e $q \in \gamma$.
- (iii) Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, existindo assim $q > p$ tal que $q \in \alpha$, e $q \in \gamma$.

Logo γ é de fato um número real.

É claro que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$. Se houver algum $\beta \in B$, tal que $\beta < \gamma$, então haverá um racional p satisfazendo $p \in \gamma$, e $p \notin \beta$; mas se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, e isto

implica que $\beta < \alpha$, o que contradiz (d). Portanto, $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$, e a demonstração está completa. $\square$

Corolário 21. *Sob as hipóteses do teorema 20, ou A contém elemento máximo, ou B contém elemento mínimo.*

Teorema 22. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Se X é limitado superiormente, então X possui supremo.*

Prova. Sejam os conjuntos A e B definidos da seguinte forma:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \exists x \in X \text{ com } \alpha < x\};$$

$$B = A^c = \{\alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha \geq x, \forall x \in X\}.$$

Observemos que nenhum elemento de A é cota superior de X e que todo elemento de B é cota superior de X . Para provar que existe um supremo no conjunto X , basta mostrar que B contém elemento mínimo. Verificaremos agora que A e B satisfazem as hipóteses do teorema 20. Os itens (a) e (b) se verificam imediatamente.

Mostraremos que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. De fato, sendo $X \neq \emptyset$, então existe $x \in X$, pela definição de A tem-se que todo $\alpha < x$ pertence a A , logo $A \neq \emptyset$. Como X é limitado superiormente tem-se que existe y tal que $x \leq y$, para todo $x \in X$, então $y \in B$, ou seja, $B \neq \emptyset$.

No item (d) tem-se que se $\alpha \in A$, e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$. De fato, se $\alpha \in A$, então existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$, se $\beta \in B$, então $x \leq \beta$, portanto $\alpha < x \leq \beta$, logo $\alpha < \beta$, para todo $\alpha \in A$, e $\beta \in B$.

Pelo corolário do teorema 20 temos que A tem elemento máximo, ou B tem elemento mínimo. Mostraremos que A não tem máximo. De fato, seja $\alpha \in A$, então existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$, escolha α' tal que $\alpha < \alpha' < x$, então $\alpha' < x$, assim $\alpha' \in A$, isto é, existe $\alpha' \in A$ tal que $\alpha < \alpha'$, então α não é máximo de A .

Portanto o conjunto B tem elemento mínimo. Como B é o conjunto das cotas superiores de X , tem-se então que o conjunto X possui supremo. $\square$

Definição 23. Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo será chamado um corpo ordenado completo.

Com essa definição, é possível perceber que $\mathbb{Q}$ não é um corpo ordenado completo, pois, temos o subconjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ que não possui supremo em $\mathbb{Q}$, por exemplo.

Observando a definição 23 e o Teorema 22 concluímos que o conjunto dos números reais é completo. Prova-se que, por exemplo, o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3\}$ é limitado superiormente. Portanto, pelo Teorema 22, possui supremo em $\mathbb{R}$, o qual prova-se que é o corte $\sqrt{3}$ definido no exemplo 1.

Referências

RUDIN, Walter. Principles of Mathematical Analysis. 2. ed. New York: Mcgraw-hill, 1964.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise. vol. 1, 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

Quadrado Mágico: uma proposta de ensino para introduzir o conceito de Progressão Aritmética

Lucas Campos de Araújo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
kopier_business@hotmail.com

Resumo: Na contemporaneidade, pode-se observar que a Matemática é a disciplina que mais faz “inimigos”, muitos alunos não gostam dela justamente por não terem aprendido conceitos básicos e necessários para a construção de novos conhecimentos ou até mesmo por não entenderem alguns procedimentos práticos utilizados na resolução de problemas. Nesse sentido, faz-se necessário uma mudança no processo de ensino que propicie uma aprendizagem significativa e homogênea entre os discentes, visto que cada ser humano possui uma forma própria de aprender, a qual acredito ser possível pelo uso de diferentes metodologias de ensino. Assim, pretende-se apresentar neste trabalho, norteados pelo conjunto da Investigação Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação e História da Matemática, uma proposta de abordagem introdutória sobre os conteúdos de Progressão Aritmética utilizando o Quadrado Mágico o software Toxxyn e a planilha do Excel.

Palavras-chave: Quadrado Mágico; Investigação; Tecnologias.

1 Introdução

No filme *Gifted Hands*, temos o retrato da história de vida do médico, negro e de origem humilde Ben Carson, que possuía dificuldades nos padrões exigidos pela nova escola em que estudava, mas fora incentivado por sua mãe aos estudos utilizando-se dos meios disponíveis como biblioteca pública e algumas tecnologias que posteriormente foram disponibilizadas por alguns de seus professores. A apropriação desses conhecimentos e o acesso à cultura, indiretamente a um ensino diferenciado, lhe proporcionaram realizar o sonho de torna-se neurocirurgião, apesar das dificuldades financeiras e barreiras étnicas e culturais. Nesse sentido, temos que a apropriação de conhecimentos de modo diferenciado tem um papel importante e contributivo na cultura individual e consequentemente na formação do cidadão.

Tomando como exemplo a Matemática, temos que essa é utilizada para formar opinião, ditar regras e justificar ou validar problemas de ordem econômica, política e social. Logo, possui importância na formação cultural do ser. Conforme Araújo:

[...] é utilizada na apresentação de decisões políticas, por exemplo, de uma maneira tal que sugira que a decisão tomada aponta o melhor caminho a ser seguido, sem deixar margens para contra-argumentações, o que caracteriza seu uso como linguagem de poder. Ou seja, a Matemática participa na estrutura do debate político, o que explicita sua dimensão política na sociedade. Assim sendo, aqueles que não têm acesso a Matemática estão sujeitos ao controle e às vontades daqueles que o têm e que detêm o poder autoritário na sociedade, já que a impossibilidade de acesso significa não participar do complexo debate político, sustentado por essa ciência. Como consequência, podem-se reforçar as desigualdades sociais, o racismo, as discriminações socioeconômicas, etc. (ARAÚJO, 2007).

No entanto, no atual cenário da educação, apesar da grande diversidade de metodologias de ensino/aprendizagem, temos professores “[...] inseguros diante das novas ações” (PACHECO; PACHECO, 2013, p.44) que, por vezes, preferem não sair da zona de conforto deixando assim de lado a responsabilidade com a capacitação teórica e prática. D’Ambrósio (2012) ainda enfatiza que para ser bom professor é necessária dedicação e preocupação com os alunos, pois

Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, sem preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo àquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante, por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário (pois, se assim fosse, melhor seria ficar calado 49 minutos!), mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e os macetes que conhece (D’AMBRÓSIO, 1991).

Esta diversidade nas formas de ensinar decorre principalmente do grande número de estudos que visam o aperfeiçoamento do ensino e, por muitas vezes, esses estudos são tomados com um caráter subjetivo ao entendimento do educador, que por não conseguir abstrair os princípios fundamentais do método, acaba utilizando-se do mesmo de forma errônea.

Pode-se observar esse efeito, por exemplo, na Matemática que é a disciplina que mais faz “inimigos”, visto que muitos alunos não a apreciam justamente por não terem aprendido os conceitos básicos dessa ciência, necessários para a construção de novos ou até mesmo não entenderem alguns procedimentos práticos utilizados na resolução de problemas. Esses obstáculos, muitas vezes, advêm da metodologia empregada pelo professor, a qual o aluno não conseguiu se adaptar.

Além disso, em geral, as aulas de Matemática são trabalhadas da mesma forma como era no século passado, a chamada metodologia Tradicional, que visa um ensino engessado de modo a tornar difícil despertar no aluno, o qual vivencia essa sociedade tecnológica, o interesse pelos conteúdos programáticos desenvolvidos em sala de aula. Ainda, é importante salientar:

A relação desproporcional entre a quantidade de conteúdo programático e o tempo hábil para desenvolvê-lo fomenta uma prática docente para o ensino da Matemática, em que o professor esforça-se para transmitir ao aluno todo o conteúdo de forma pronta, acabada e acelerada, elevando, para o primeiro plano da ação docente, o conteúdo, e rebaixando para o segundo, a aprendizagem. (CHAVES, 2005).

Logo, atividades diferenciadas e a experimentação no ensino são práticas dissonantes com o exposto anteriormente, mas que visam à construção do conhecimento aliada ao desenvolvimento de atitudes de cooperação social.

A ideia do ensino despertado pelo interesse do estudante passou a ser um desafio à competência do docente. O interesse daquele que aprende passou a ser a força motora do processo de aprendizagem, e o professor, o gerador de situações estimuladoras para a aprendizagem (CUNHA, 2012).

Nesse sentido, é mister uma atitude de mudança de modo a propiciar um ambiente de ensino/aprendizagem diferenciado. Para tal, Skovsmose (2000) propõe que o ensino deve mover-se para o paradigma da investigação. Nesse paradigma enquadra-se, entre outras tendências, a Investigação Matemática. Esta propõe, de modo geral, que os alunos a partir de uma situação aberta, proposta pelo professor, ajam como matemáticos profissionais levantando questões para investigar, formulando e testando hipóteses e por fim validando seus resultados, redescobrendo a Matemática.

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade Matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, 2006).

Segundo Ponte (2006) uma investigação matemática se desenvolve em quatro momentos. Estes momentos descrevem as ações desenvolvidas pelos alunos em uma Investigação Matemática. No primeiro acontece a identificação da situação, sua exploração e a formulação de questões, no segundo formulam-se as conjecturas e em seguida no terceiro momento fazem-se testes e o refinamento das conjecturas e por fim, o quarto momento, diz respeito à argumentação, à demonstração e à validação dos resultados. É importante ressaltar que, muitas vezes, os momentos podem ocorrer simultaneamente e alguns podem repetir-se ao longo da atividade, como por exemplo, após negar alguma conjectura os alunos podem formular outra e assim como anteriormente testar sua veracidade.

Ponte (2006), também, traz orientações para o trabalho dos professores afirmando que uma atividade de investigação geralmente se desenvolve em três fases. Na primeira o professor propõe aos alunos a tarefa seja por escrito ou oralmente, na segunda os alunos realizam a investigação seja individualmente ou em grupos e por fim na terceira fase faz-se a socialização e discussão dos resultados.

Vale salientar, dentre os momentos da atividade, que na fase da investigação o professor deve acompanhar como os alunos estão trabalhando e prestar apoio quando necessário, salientando que eles utilizem seus conhecimentos prévios, porém é importante que os alunos interajam em grupo decidindo o rumo da investigação e o professor só interfira quando identificar que o grupo precisa.

No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. (PONTE, 2006).

No entanto, por acreditarmos que o uso de uma única metodologia é insuficiente para atender a diversidade encontrada em uma sala de aula, neste trabalho pretendemos apresentar uma proposta de ensino, norteados pelas tendências metodológicas da Investigação Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação – TICS e História da Matemática.

Visto que, acreditamos que a Investigação Matemática em conjunto com as Tecnologias da Informação e Comunicação - TICS possibilita um efetivo aperfeiçoamento no ensino e aprendizado de Matemática, favorecendo aspectos motivacionais e o interesse em aprender além de incentivar o desenvolvimento de inúmeras habilidades matemáticas, como o raciocínio lógico e o reflexivo. Ainda, temos que a História da Matemática tem um caráter convidativo ao aluno no sentido da investigação, propiciando conhecimentos que possibilitem a compreensão efetiva de conteúdos matemáticos.

[...] dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político (SANTOS apud FERREIRA, 2009).

Também cremos que a investigação, relacionada à Matemática e trabalhada com rigor, viabiliza um ambiente em que o aluno estabelece hipóteses e questionamentos sobre o conteúdo e o fator fundamental envolvido nesse processo é a troca de ideias entre os participantes, ou seja, a construção do conhecimento a partir de suas reflexões.

Ainda que, uma investigação, é um problema em aberto e, por isso, as coisas acontecem de forma diferente do que na resolução de problemas e exercícios. O objeto a ser investigado não é explicitado pelo professor, porém o método de investigação deverá ser indicado através, por exemplo, de uma introdução oral de maneira que o aluno compreenda o significado de investigar.

Ou seja, a Investigação Matemática apresenta um caráter de análise, observação e experimentação, que permite aos discentes estabelecer correlações entre diversas áreas do conhecimento. Ainda possibilita que os mesmos façam conjecturas de difícil ocorrência no método de ensino tradicional, no qual não se tem preocupação com a aprendizagem significativa que segundo Moreira (2011):

Aprendizagem Significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé da letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2011).

Vale ressaltar que a investigação em conjunto com as TICS tem seu desempenho amplificado, pois na era tecnológica em que vivemos, existe uma intensa interação entre homem e máquina, a qual pode-se utilizar como meio de propiciar a aquisição de novos conhecimentos.

De fato, isso é possível por conta da existência de diversos softwares que abordam os mais diferentes conteúdos. No entanto, são poucos os profissionais que tem conhecimento sobre esses

materiais diferenciados, muitas vezes, acabam se prendendo a programas de maior repercussão ou não se posicionam no interesse em acessar os diversos repositórios digitais disponíveis atualmente, seja pelo desconhecimento ou medo em sair da zona de conforto.

Nesse sentido, pretendemos apresentar neste breve trabalho uma proposta didática de abordagem a respeito do conteúdo de progressão aritmética, norteados pelo conjunto da Investigação Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação e História da Matemática. Para tal tomaremos uma ferramenta elaborada há alguns milênios e denotada por Quadrado Mágico e a utilizaremos em conjunto com os softwares Excel e Toxyn, o primeiro refere-se a uma planilha eletrônica com muitas funções matemáticas desde cálculos simples até elaboração de gráficos, e o segundo diz respeito a um gerador de Quadrado Mágicos de ordem igual ou superior a três, em que a ordem é o número de quadradinhos em cada lado do Quadrado Mágico.

Para melhor compreensão podemos compreender um Quadrado Mágico (QM) como uma matriz de ordem n , ou seja, uma grade quadricular com n por n entradas, em que a soma dos termos de cada linha, bem como a soma dos termos de cada coluna é equivalente a uma mesma constante, denominada de Constante Mágica (CM). Se esta constante, também, for obtida somando-se os termos da diagonal principal e secundária, então o Quadrado Mágico é dito perfeito. Caso contrário, ou seja, se a soma dos elementos da diagonal principal e secundária não for equivalente a CM, é denominado imperfeito.

2 Encaminhamento metodológico

Para realização da atividade elaboramos uma sequência didática com alguns encaminhamentos metodológicos e roteiros, assim dividimos a atividade em algumas etapas, que podem ser expressas como:

- Familiarização aos Softwares;
- Identificação das características básicas do Quadrado Mágico;
- Construção do verificador de Quadrados Mágicos de ordem 3;
- Comparação de Quadrados Mágicos de mesma ordem e sequências numéricas iguais/diferentes;
- Denotar o Quadrado Mágico Loh-Shu e suas transformações;
- Relacionar o Quadrado Mágico de Loh-Shu e suas transformações com a Progressão Aritmética;
- Formalização do conceito de Progressão Aritmética.

No primeiro momento, pretendemos introduzir o conceito de Quadrado Mágico, para tal utilizaremos o software Toxyn, que permite a construção de Quadrados Mágicos Aditivos, expondo aos discentes os comandos necessários por meio verbal e por um roteiro impresso. Assim, proporemos aos discentes que gerem um quadrado mágico de ordem três e observem

suas peculiaridades e esperamos que os discentes notem que no quadrado gerado a soma dos elementos de cada linha, coluna, diagonal principal e secundária equivale a um mesmo valor, que neste caso é quinze, conforme a seguir.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Em sequência iremos expor que o quadrado gerado pelo software é denominado Quadrado Mágico Aditivo cujo primeiro registro conhecido remonta a antiguidade da China, o qual leva o nome de Loh-Shu (1800a.C.).

Além disso, iremos explicar que o quadrado pode ser compreendido como uma tabela com n linhas e n colunas, em que a soma dos elementos de cada linha ou coluna é sempre igual a uma mesma constante denominada de Constante Mágica. Quando ocorrer dessa constante se repetir ao somarmos os elementos da diagonal (principal ou secundária) é denominado Quadrado Mágico Puro ou Normal.

Posteriormente, pretendemos propor aos discentes a construção de outro Quadrado Mágico formado pela sequência de números (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), para tal utilizaremos a planilha Excel e proporemos a construção do verificador de Quadrado Mágico utilizando um roteiro impresso. Este verificador simplesmente realiza a soma das linhas, colunas e diagonais do quadrado facilitando assim a observação da Constante Mágica.

Após a construção pretendemos propor os seguintes questionamentos:

1. Qual foi a Constante Mágica Encontrada? É diferente da constante do primeiro Quadrado Mágico?
2. Observe os números que formaram o primeiro Quadrado Mágico em relação à sequência numérica que originou o segundo quadrado. O que mudou de uma sequência para outra?
3. Podemos relacionar a diferença entre os termos das sequências com a nova Constante Mágica encontrada? Justifique.

A partir dessas atividades, esperamos que os discentes observem que o valor da Constante Mágica do novo quadrado gerado é diferente da primeira e equivale a 18. Ainda esperamos que notem que da primeira sequência para segunda os termos foram adicionados de uma unidade, ou seja, ao observarmos este aumento em cada casa do quadrado teremos que a nova Constante Mágica é nada mais que a anterior acrescida de três unidades.

Posteriormente, pretendemos expor a relação entre os Quadrados Mágicos Aditivos e a Progressão Aritmética, para tal denotaremos algumas propriedades que permitem a partir da sequência de números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, que representa o quadrado de Loh-Shu (2800 a.C.), gerar novos Quadrado Mágicos utilizando-se de soma de constantes e produto por um escalar. Com isso esperamos que os discentes observem o exposto nas seguintes definições:

Definição

Qualquer sequência de nove números inteiros consecutivos pode ser arranjada na forma de um Quadrado Mágico.

Definição

Qualquer sequência de nove múltiplos consecutivos de um número inteiro pode ser arranjada na forma de um quadrado mágico.

Então, utilizando ao mesmo tempo ambas as operações anteriores e partindo do Quadrado Mágico de Loh-Shu, pretendemos construir com os discentes novos Quadrados Mágicos e indaga-los a respeito das transformações ocorridas nas sequências numéricas geradas em relação a sequência primária, de modo que observem o exposto na seguinte definição:

Definição

Dada uma Progressão Aritmética de nove termos, quando posicionados todos os seus termos na posição que o número ocupa no quadrado de Loh-Shu, o quadrado resultante também será mágico.

Por fim, com o intuito de formalizar o conceito de Progressão Aritmética, iremos denotar aos discentes as posições dos termos periféricos do Quadrado Mágico. Para tal, consideraremos o Quadrado Mágico de Loh-Shu, ou seja, a sequência numérica (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) então denotaremos que:

- O termo central do quadrado é 5 visto que é o termo central da PA, como visto anteriormente;
- Então, subtraindo o termo central, de todos os números, obtemos (-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4);

Assim, o Quadrado Mágico formado por esses valores terá 0 como Constante Mágica. E será possível observar que todos os termos simétricos em relação a 0 são opostos aditivos. Desse modo ressaltaremos que, tomando um PA de nove termos, podemos dizer que o termo central do quadrado será também o termo central da PA, assim como os valores simétricos serão também os valores simétricos da PA, conforme a seguir.

3	-4	1
-2	0	2
-1	4	-3

Conclusões

Na contemporaneidade é evidente o grande anseio dos professores para formação tecnológica perante um avanço tecnológico fervoroso visto que, por muitas vezes, as capacitações acabam sendo insuficientes para o trabalho no ambiente escolar. E isto mais do que um anseio aos profissionais é uma preocupação que deveria ser levada em conta também pelos órgãos governamentais, dado que a inserção de novas tecnologias sem a capacitação tanto técnica como

metodológica dos profissionais mostra no mínimo um despreparo dos responsáveis pelos planejamentos nesses setores.

Contudo, acreditamos que é possível a utilização de metodologias diferenciadas no ensino, como as tecnologias e a investigação, mas não necessariamente de modo integral nas aulas, visto que há a necessidade de momentos mais tradicionais que envolvam basicamente a repetição e não a construção de novos conhecimentos.

Ainda, estamos certos e conscientes de que a implementação de novas metodologias não é algo simples, pois essas são entendidas de formas diferentes de acordo com o ponto de vista de cada educador. Além disso, atualmente tem-se uma desvalorização do conhecimento científico principalmente envolvendo atividades laboriosas, logo cabe ao educador o estabelecimento de tarefas que direcionem as atividades desenvolvidas pelos discentes para atingir seus objetivos e propiciar aos alunos momentos de aprendizagem significativa.

Deve-se ressaltar, também, que a utilização de metodologias diferenciadas por si só não faz milagres, ou seja, as mudanças na educação dependem, mais do que dos educadores, gestores e alunos maduros intelectualmente, emocionalmente e eticamente, mas depende da curiosidade tanto do aluno em criticizar-se quanto do professor em estimular o que defende Freire (2002) “a evolução da curiosidade ingênua para a curiosidade epistemológica”. Nesse sentido acreditamos que atividades, como a proposta neste trabalho, tem muito a contribuir com o desenvolvimento cognitivo do aluno, ampliando seu leque de conhecimentos e possibilitando novas visões sobre a Matemática.

Referências

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

CHAVES, M. I. A. **Modelando Matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

D'AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global**. Temas & Debates, São Paulo, 1991.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, N. S. **Modelagem Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação como ambiente para abordagem do conceito de Função segundo a Educação Matemática Crítica**. Ouro Preto, Universidade Federal de Rio Preto, 2013.

HEATH, R. V. **Mathemagic: Magic, Puzzles and Games with Numbers** (Dover Recreational

Math) Paperback – June 1, 1953.

MOREIRA, M. A. **O que é a Aprendizagem significativa afinal?** Instituto de Física.
UFRGS. Porto Alegre- Rio Grande do Sul (2011).

Análise da produção escrita de uma tarefa envolvendo o conceito de razão

Andréia Büttner Ciani

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
andbciani@gmail.com

Gabriela Artini da Silva

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
gabrielaartini@hotmail.com

Guilherme Gasparini Lovatto

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
guigasparinilovatto@hotmail.com

Resumo: Neste trabalho nos propomos a analisar 25 produções escritas de tarefas realizadas por estudantes do PROMAT. O objetivo foi identificar a maneira que estes estudantes lidaram com o enunciado de uma tarefa envolvendo o conceito de razão, após o conceito ser apresentado em aula. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, pautada nas premissas da Análise de Conteúdo. A fundamentação teórica está embasada na produção científica da Educação Matemática que diz respeito à Avaliação da Aprendizagem em Matemática, a qual considera a Análise da Produção Escrita como um caminho para se efetivar a Avaliação da Aprendizagem. A análise interpretativa das resoluções nos permitiu identificar semelhanças que convergiram para três agrupamentos no que diz respeito às estratégias utilizadas pelos estudantes. Todos os estudantes demonstraram compreender o conceito de razão entre dois números, sendo que as respostas incorretas foram devidas à comparação entre números racionais.

Palavras-chave: Análise da produção escrita; Avaliação da aprendizagem; Razão.

1 Introdução

Durante o primeiro semestre do ano de 2019 corrente, atuamos como professores responsáveis por uma turma do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – PROMAT¹. A ideia deste artigo surgiu a partir da nossa experiência desta regência em Matemática neste Programa, do qual participaram alunos matriculados no Ensino Médio, em sua maioria. Ministras aulas no PROMAT é parte integrante da disciplina de Estágio Supervisionado I, do qual nós, primeiro e segundo autor, somos alunos.

¹Trata-se de um Projeto de Ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino, tanto do município de Cascavel, quanto dos municípios vizinhos interessados. O PROMAT tem por objetivo o entendimento de conteúdos matemáticos, de modo que promova o acesso e permanência de estudantes nas universidades públicas.

Durante o PROMAT fizemos valer nossa ideia a respeito de Avaliação para a Aprendizagem. Compreendemos que a avaliação deve permear todo o processo de ensino e de aprendizagem, possibilitando ao professor e estudante *feedbacks* durante todo o processo e não apenas um momento pontual, do qual não se extrai muita informação para além de uma nota e uma classificação entre os estudantes. Indo ao encontro desta perspectiva, buscamos respaldo teórico em Dalto e Buriasco (2009), que compreendem que o processo avaliativo não deva se restringir apenas em “medir” ou verificar o “certo e errado”, mas que tal processo busque identificar os conhecimentos revelados na resolução o que, por sua vez, fornece informações a respeito do processo de ensino e aprendizagem e pode resultar na tomada de decisões. Para Abrantes (1995), Hadji (2001), Esteban (2002), Buriasco (2002; 2004) (apud DALTO; BURIASCO, 2009, p. 451) a “[...] avaliação deve estar a serviço da ação pedagógica e deve ser também um mecanismo de regulação do processo educativo”.

Nesse sentido,

[...] para que a avaliação possa efetivamente ser utilizada como instrumento de regulação do processo de ensino e aprendizagem de matemática, talvez o primeiro passo seja a mudança na forma como os erros dos alunos são encarados (DALTO; BURIASCO, 2009, p.451 - 452).

Nesta perspectiva, a análise da produção escrita leva em consideração que é necessário avaliar as dificuldades, olhar os pontos em comum, ver se os conceitos foram apresentados de forma clara para que houvesse a apropriação do conhecimento, reconhecer conhecimentos já existentes e em construção, além de perceber se existe dificuldade desde a leitura e interpretação até aspectos voltados para o raciocínio lógico. Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) centralizam suas análises em aspectos essenciais e específicos para cada situação, isto é, os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução, quais conhecimentos matemáticos foram utilizados, erros e quais sua possível natureza.

Nagy-Silva e Buriasco (2005) defendem que a análise da produção escrita não só serve para avaliar o processo ensino e aprendizagem, mas também para estimular a postura crítica dos alunos diante de suas estratégias de resolução, o que contribuirá no desenvolvimento do raciocínio, de uma postura investigativa diante dos mais diversos problemas, e desprendimento das “palavras-chave” de enunciados.

Segundo Borasi (1987 apud DALTO; BURIASCO, 2009, p. 452) a avaliação é uma oportunidade de explorar o desenvolvimento da matemática no conhecimento do estudante, e seus erros utilizados para diagnóstico e remediação, quando a utilização dos erros reside sobre o diagnóstico das causas que levam ao erro e sobre os mecanismos para a sua superação, e investigação quando os erros são utilizados como mecanismos motivacionais de investigação do conteúdo relacionado ao erro. Desta maneira o educador dará mais atenção a cada passo utilizada na resolução do problema proposto.

Com isso, não se deve criminalizar o erro, mas tratá-lo como um obstáculo no processo de construção do conhecimento, uma vez que não existe um caminho único para chegar ao objetivo final, existem vários caminhos que variam dos mais fáceis, mais longos até os mais difíceis e o

papel do educador é identificar o caminho que o aluno está seguindo para orientá-lo de forma correta.

Dalto (2007) caracterizou

estratégia como a maneira pela qual o estudante abordou o problema. Por exemplo, para resolver um problema um estudante pode utilizar uma estratégia algébrica, uma aritmética, etc. Já o procedimento relaciona-se ao processo de desenvolvimento da estratégia. [...] (p. 38).

Levaremos em consideração, então, estes dois termos: estratégia e procedimento. A fim de descrever, interpretar e analisar as resoluções dos estudantes por meio de suas produções escritas.

2 Metodologia

Sob a luz da avaliação da aprendizagem, almeja-se analisar a produção escrita, dos alunos, em uma questão envolvendo razão. Em relação a análise da produção escrita pode dizer que está centrada na análise de conteúdos de Bardin (1977). Esta autora descreve análise de conteúdo como sendo

[...] um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da Análise de Conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção. Esta forma de análise leva o pesquisador, depois de muito estudo, a criar categorias, agrupando unidades de análise semelhantes, fazendo inferências sempre que necessário e possível. (BARDIN, 1977, p. 26 apud SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p. 109).

Durante nosso percurso pelo PROMAT, utilizamos as premissas da análise da produção escrita para avaliar nossa ação sobre o projeto e a maneira que os conhecimentos passados em aula estão sendo mobilizados em uma tarefa avaliativa, escolhida de maneira a abordar grande arte dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Esta tarefa eram entregues aos alunos nos últimos minutos de cada aula, pedíamos que resolvessem sem consulta e que não precisaria dispor de seu nome na tarefa, além disso, explicitamos aos alunos que esta última tarefa seria utilizada para retomar conceitos matemáticos na aula seguinte em que eles tivessem maior dificuldade, ou seja, foram dados *feedbacks* aos alunos sobre estas tarefas. Entretanto, deixamos claro aos alunos que esta tarefa não seria utilizada para emitir uma nota ou “medi-lo” através de sua produção escrita em cada tarefa.

Diante disso, este artigo se propõe a analisar a produção escrita de uma das tarefas, utilizada como instrumento de avaliação, de uma das aulas do PROMAT. Totalizando 25 produções escritas.

A tarefa analisada abordava o conteúdo de razão e foi adaptada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2016.

(Adaptado ENEM 2016) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram

testar cinco tipos de filtros de água. Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização. Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3mg em 2dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho. Qual será o filtro descartado?

Disponível em: www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado)

Esperávamos que os estudantes calculassem a razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, para cada filtro. Isto é, para F1 tem-se $\frac{18mg}{6dias}$ que é equivalente a 3 mg/dia. Para o F2, calcula-se $\frac{15mg}{3dias}$ é igual a 5 mg/dia. Para o F3, temos $\frac{18mg}{4dias}$ que é equivalente a $\frac{9mg}{2dias}$ que é igual a 4,5 mg/dia. Já para o F4, tem-se $\frac{6mg}{3dias}$ que é igual a 2 mg/dia. E para F5, calcula-se $\frac{3mg}{2dias}$ que é igual a 1,5 mg/dia. Diante das razões obtidas, compara-se qual é a maior, que neste caso é 5 mg/dia, isto é, o filtro descartado deverá ser o filtro 2.

Com a produção escrita dos alunos, realizamos as descrições de cada uma das 25 tarefas que nos entregaram, que estão ordenadas por T1, T2, ..., T25. Ou seja, neste dia, apenas 25 alunos entregaram a tarefa ao terminar a aula.

3 Sobre as resoluções e descrições

Sob a luz da avaliação da aprendizagem, analisamos a produção escrita da tarefa mencionada, esta análise está centralizada na análise de conteúdo de Bardin (1977), que descreve como sendo

“[...] um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da Análise de Conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção. Esta forma de análise leva o pesquisador, depois de muito estudo, a criar categorias, agrupando unidades de análise semelhantes, fazendo inferências sempre que necessário e possível” (BARDIN, 2004, p. 26 apud SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015, p. 109).

Diante disso, resultou o primeiro quadro de análise onde descrevemos as produções escritas e realizamos inferências quando as resoluções, conforme o quadro abaixo.

Quadro 1: Descrições e Inferências

Tarefa	Descrição	Inferência
T1 a T16	Desenvolveu conforme a resolução esperada.	Não há.
T17	Calcula a razão entre 18 e 6, igualando a $\frac{6}{3}$ e obtém a fração equivalente $\frac{2}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3 igualando a $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre $\frac{18}{4}$ e obtém a fração equivalente $\frac{9}{2}$. Calcula a razão entre 6 e 3 obtendo a fração equivalente $\frac{2}{1}$ e apresenta a razão $\frac{3}{2}$. Conclui que o filtro 3 será descartado.	Ao concluir que o filtro 3 será descartado, o aluno tem que $\frac{9}{2}$ é maior que qualquer outra razão, então acreditamos que compara o numerador e denominador das frações e escolhe a que tem maior numerador.
T18	Calcula a razão entre 18 e 6, simplifica por 3 e obtém $\frac{6}{3}$, novamente simplifica por 3 e resulta em $\frac{2}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3, simplificando por 5 obtém $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre 6 e 3 e iguala a $\frac{2}{1}$. Apresenta a razão $\frac{3}{5}$ (para o filtro 5). Conclui que o filtro três será descartado.	Ao concluir que o filtro 3 será descartado, o aluno tem que $\frac{9}{2}$ é maior que qualquer outra razão, então acreditamos que compara o numerador e denominador das frações e escolhe a que tem maior numerador.
T19	Calcula a razão entre 18 e 6. Obtendo uma fração equivalente igual a $\frac{15}{5}$, desta fração obtém o quociente 5. Calcula a razão entre 18 e 4 obtendo 6. Também calcula a razão entre 3 e 2 resultando em 1. Conclui que o filtro descartado será o filtro 3.	O aluno conclui que três será descartado porque obtém a razão entre 18 e 4 equivocadamente.
T20	Calcula a razão entre 18 e 6, então obtém o quociente 3. Calcula a razão entre $\frac{15}{3}$ e iguala a 5. Calcula a razão entre 18 e 4 e iguala a fração equivalente $\frac{9}{2}$. Calcula a razão entre 6 e 3 obtendo 2 e apresenta a razão entre 3 e 2. Concluindo que o filtro três será descartado.	Como o aluno concluiu que o filtro três será o descartado, acreditamos que considera a fração $\frac{9}{2}$ maior do que as razões obtidas nas outras frações. Se tivesse calculado o quociente entre 9 e 2 perceberia que 4,5 não é maior do que todas as outras razões.

Tarefa	Descrição	Inferência
T21	Calcula a razão entre 18 e 6 obtendo como quociente o número 4. Calcula a razão entre 15 e 3 e obtém 5. Calcula a razão entre 18 e 4 resultando em 6. Calcula a razão entre 6 e 3 e iguala a 2. Calcula a razão entre 3 e 2 igualando a 1. O aluno conclui que será descartado o filtro 3.	O aluno conclui que três será descartado porque obtém a razão entre 18 e 4 equivocadamente.
T22	Calcula a razão entre 18 e 6, obtendo $\frac{3}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3 resultando em $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre 18 e 4, simplifica por 2 e obtém $\frac{9}{2}$. Conclui que o filtro descartado é o filtro 3.	Como o aluno concluiu que o filtro três será o descartado, acreditamos que considera a fração $\frac{9}{2}$ maior do que as razões obtidas nas outras frações. Se tivesse calculado o quociente entre 9 e 2 perceberia que 4,5 não é maior do que todas as outras razões.
T23	Calcula a razão entre 18 e 6 e iguala a fração equivalente $\frac{6}{2}$ e iguala esta fração a $\frac{3}{1}$. Calcula a razão entre 6 e 3 igualando a fração equivalente $\frac{2}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3, simplifica por 3 e obtém a fração equivalente $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre 18 e 4, simplificando por 2 obtém $\frac{9}{2}$.	Como o aluno concluiu que o filtro três será o descartado, acreditamos que considera a fração $\frac{9}{2}$ maior do que as razões obtidas nas outras frações. Se tivesse calculado o quociente entre 9 e 2 perceberia que 4,5 não é maior do que todas as outras razões.
T24	Calcula a razão entre 18 e 6 e iguala a $\frac{2}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3, obtendo $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre 18 e 4 igualando a $\frac{9}{2}$. Calcula a razão entre 6 e 3 obtendo a fração equivalente $\frac{2}{1}$. Apresenta a razão entre 3 e 2. Conclui que o filtro 3 será descartado.	O aluno conclui que o filtro 3 será descartado porque ao comparar as frações, entende que $\frac{9}{2}$ é maior do que qualquer outra fração. Se tivesse calculado o quociente entre 9 e 2 perceberia que 4,5 não é maior do que todas as outras razões.

Tarefa	Descrição	Inferência
T25	Calcula a razão entre 18 e 6, simplifica por 6 e obtém $\frac{3}{1}$. Calcula a razão entre 15 e 3, simplificando por 3 obtém $\frac{5}{1}$. Calcula a razão entre 6 e 3 e iguala a $\frac{2}{1}$. Calcula a razão entre 18 e 4, simplificando por 2 obtém $\frac{9}{2}$. Apresenta a razão $\frac{3}{5}$ (para o filtro 5). Conclui que o filtro três será descartado.	Como o aluno concluiu que o filtro três será o descartado, acreditamos que considera a fração $\frac{9}{2}$ maior do que as razões obtidas nas outras frações. Se tivesse calculado o quociente entre 9 e 2 perceberia que 4,5 não é maior do que todas as outras razões.

Fonte: Acervo dos autores

Das 25 produções analisadas, dezesseis desenvolveram a tarefa de acordo com a resolução esperada. Nove concluíram que o filtro que deveria ser descartado era o filtro três. Estes nove apresentaram a mesma estratégia, ou seja, a estratégia de se obter a razão entre cada uma das grandezas, conforme a resolução esperada. Entretanto, os procedimentos foram equivocados e por este motivo concluíram que o filtro três deveria ser descartado.

Ao analisar cada uma das 9 produções, percebemos que o que leva ao equívoco no procedimento é ao comparar as razões calculadas. Exceto pelo estuante, cuja produção escrita é T21), que obteve razão entre 18 e 4 igual a 6, inferimos que todos os outros concluem que a razão $\frac{9}{2}$ é maior que todas as outras razões, ou seja, ao comparar as frações, inferimos que, provavelmente estes alunos levam em consideração apenas o numerador da fração e não o número todo, e como $\frac{9}{2}$ tem numerador maior do que os numeradores das outras frações, concluíram que esta razão é maior do que as outras.

Conforme os resultados acima, percebemos que dezesseis alunos apresentaram a estratégia correta e procedimentos corretos, e nove alunos apresentaram estratégia correta, mas tiveram procedimentos equivocados.

Diante disso, as descrições foram agrupadas por semelhança e resultou no primeiro agrupamento, conforme o quadro abaixo.

Quadro 2: Descrições agrupadas

Tarefas	Descrições agrupadas
T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, T12, T13, T14, T15 e T16.	Desenvolveu conforme a resolução esperada.
T17, T18, T19, T20, T21, T22, T23, T24 e T25.	Calculam a razão entre as grandezas, mas concluem que o filtro 3 será descartado.

Fonte: Acervo dos autores

A análise da produção escrita mostrou que todos os alunos apresentaram a mesma estratégia para resolver a tarefa, ou seja, de calcular a razão entre medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias. A maioria dos estudantes contemplou o enunciado,

o qual propunha aos estudantes que calculassem qual era a maior razão entre as grandezas. Os outros nove estudantes concluíram que o filtro a ser descartado seria o filtro três.

Os estudantes que consideram $\frac{9}{2}$ maior do que 5, apresentam uma dificuldade em compreender o conceito de fração. Este equívoco pode ter acontecido porque para os estudantes a maior fração é a que tem maior numerador, desta maneira percebemos que eles não veem a fração como parte de um todo, mas apenas como um número, ou seja, o conceito de fração pode estar relacionado com o resultado apresentado por estes estudantes nesta tarefa.

4 Considerações finais

A análise da produção desta tarefa nos permitiu diagnosticar a maneira que os estudantes lidavam com os conhecimentos escolares de matemática na resolução de uma questão envolvendo o conceito de, e com isso, através dos resultados obtidos pudemos repensar nossa prática a fim de levar o aluno a ter uma postura crítica e investigativa. Para isso, realizamos um *feedback* para os estudantes.

Ao realizar o *feedback* visamos retomar o conceito de razão, utilizando a própria tarefa analisada neste artigo. Os alunos leram o enunciado da tarefa novamente, pois em muitos casos, é possível que o erro seja resultado da interpretação do enunciado. Então, para trazer o conceito de razão utilizamos exemplos feitos em aula, como a concorrência do vestibular que é dada pela razão entre o número de candidatos e a quantidade de vagas, ou seja, a razão é o quociente entre estas duas grandezas e não a sua representação fracionária.

Além disso, realizamos perguntas aos estudantes quanto a comparação entre frações, e como deveria ser feita. Ao obter a fração $\frac{9}{2}$, perguntamos se este número é maior do que 5, alguns estudantes responderam que sim, diante disso solicitamos que eles calculassem o quociente entre 9 e 2, concluíram que o quociente é 4,5 e, por consequência, tiraram uma nova conclusão de que $\frac{9}{2}$ é menor do que 5. Percebemos que muitos estudantes notaram que seus resultados foram equivocados ao considerar $\frac{9}{2}$ maior que 5. Então, a análise da produção escrita e o *feedback* permitiram aos estudantes refletirem sobre suas resoluções a fim de contribuir com o desenvolvimento de seu raciocínio, além da compreensão correta dos conceitos relacionados a razão.

5 Referências

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; CIANI, Andréia Büttner. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). *BOLEMA*, v. 33, p. 69-96, 2009.

DALTO, Jader Otavio. **A produção escrita em matemática: análise interpretativa da**

questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. Dissertação. Universidade Estadual de Londrina, 2007.

DALTO, Jader Otavio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Problema proposto ou problema resolvido:** qual a diferença? Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, 2009.

NAGY, Márcia Cristina; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Análise da Produção Escrita em Matemática:** algumas considerações. Ciência e Educação, v. 11, n. 3, p. 499-512, 2005.

SILVA, Daniele Peres da; PASSOS, Marinez Mineghenelo; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das. **Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da Early Algebra.** Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 8, p. 53-84, 2015.

Abordagem epistemológica de função afim

Gabriela Artini da Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
gabrielaartini@hotmail.com

Guilherme Gasparini Lovatto
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
guigasparinilovatto@hotmail.com

Resumo: Neste artigo elaboramos uma abordagem epistemológica, baseando-se no conteúdo de função do primeiro grau, onde construímos, analisamos e aplicamos situações-problema de modo que auxilie o aluno na construção do próprio conhecimento do aluno de maneira significativa e construtivista. Através da análise de situações-problemas juntamente com a análise *a priori*, encontramos os possíveis obstáculos didáticos, sejam eles dos conhecimentos gerais ou verbais, possibilitando a criação de situações que permitam os alunos a superar esses obstáculos, a fim de que o processo ensino-aprendizagem ocorra de maneira gradativa.

Palavras-chave: Situação-problema; Obstáculos; Aprendizagem.

1 Introdução

Este texto apresentará um plano de aula de função do primeiro grau utilizando situações-problema e a teoria de aprendizagem significativa. O plano de aula foi desenvolvido pensando no ensino de função do primeiro grau para alunos do primeiro ano do ensino médio.

Uma das fundamentações teóricas é um texto de Almouloud (2009), cujo problema “é a determinação de situações que teoricamente permitam ao aluno estabelecer uma relação com o saber visado” (ALMOULOU, 2009, p.992), através da dialética ferramenta-objeto, a qual

[...] é um processo cíclico que organiza os papéis respectivos do docente e dos alunos, durante o qual o conceito tem um papel ora de ferramenta para resolver problemas, ora de objeto, tomando lugar dentro da construção de um certo saber organizado. (ALMOULOU, 2009, p. 993)

Para isso, utilizaremos algumas situações-problema, sabendo que “sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões postas pelos alunos no momento da resolução do problema”(ALMOULOU, 2009, p. 994).

Também, faremos a abordagem epistemológica a respeito do tema Função, ou seja alguns dos problemas que nortearam a construção desta concepção, em outras palavras, uma pequena abordagem histórica de função. Outros itens analisados serão: o papel desta noção no ensino e na matemática, bem como as concepções iniciais e finais dos alunos. Cabe ressaltar que será apresentada a análise *a priori* das situações-problema, entretanto até o momento da elaboração deste texto, o plano de aula não foi efetivamente aplicado, portanto não há análise *a posteriori*.

A abordagem epistemológica está dividida em seções, conforme apresentado a seguir.

2 Um pouco de história

De acordo com Karlson (1961) a palavra função vem do latim *function* (execução, funcionar). As funções foram criadas de maneira implícita quando os povos perceberam a existência de dependência e variação entre duas grandezas, onde uma grandeza depende da outra. Porém o conceito de função não possui uma data precisa, pois ocorreu de maneira lenta, perto de 200a.c. a Aritmética na Babilônia já tinha avançado para uma Álgebra muito desenvolvida.

[...] dever ia-se creditar aos babilônios uma definição operacional de função devido ao uso que faziam com tabelas, como por exemplo sugerindo a definição de que uma função é uma tabela ou uma correspondência entre n e $n^3 + n^2$. (BAUMGART, 1992, p. 83 apud RAMOS, 2013)

De acordo com Youschkevith (1976 apud MAGARINUS, 2013), na antiguidade alguns casos foram verificados sobre dependências entre duas grandezas. Na Idade Média, ocorreram algumas noções de funções na forma geométrica. Já no período Moderno, a partir do século XVII, foi o momento mais intenso para o desenvolvimento do conceito de funções, esse período é o que nos acompanha até os tempos atuais.

No século XVII, Leibniz associou o conceito de funções com curvas e sua imagem geométrica. Já no século XVIII, Johann Bernoulli e Euler caracterizaram uma função como valores obtidos ao fazer operações com variável e constante. Contudo, foi Euler que introduziu a notação a qual temos nos dias atuais, $f(x)$ introduzindo assim o “(...) símbolo matemático do movimento, a função” (KARLSON, 1961).

3 A função em alguns livros didáticos

Muitos matemáticos e professores defendem o uso do livro didático para ser uma das fontes de referência durante sua aula, porém se usado de maneira equivocada pode causar um efeito negativo na aprendizagem. Por exemplo, no conceito de funções, elaborado por Paiva (2013) percebemos que há muito formalismo o que acaba, muitas vezes, causando desinteresse na turma, tendo por objetivo a memorização e não o efetivo aprendizado. Notamos também pouca ligação entre os conteúdos que já deveriam ter sido compreendidos pelos alunos. O livro também não utiliza da História para inserir esses conteúdos, deixando o assunto sobre funções desprendido de sua história e dos conteúdos trabalhados anteriormente.

Para a aplicação e fixação dos conceitos estudados há muita repetição, vários exercícios numéricos de mecanização e poucos problemas com contextualização do novo saber adquirido, em contrapartida, Dante (2005 apud MAGARINUS, 2013), defende que a contextualização colabora no processo de relacionar o que foi aprendido com algo observado e, também, associa a matemática com temas da ciência e da tecnologia.

A partir da nossa experiência acadêmica, que o livro didático é uma forma que auxilia o professor a preparar um plano de aula, porém não deve ser a única ferramenta de pesquisa, devendo consultar em mais duas ou três fontes. Diante disso, cabe ao professor analisar quais ferramentas utilizará, para estar preparado para orientar a atividade proposta, sendo capaz de identificar e auxiliar as dificuldades que os alunos poderão vir a apresentar.

4 Importância dessa noção atualmente em matemática

A função está presente em diversos campos da matemática, que varia do ensino básico até o ensino superior. Na matemática mais avançada, temos as diversas funções como item primordial no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo. Este conceito é considerado um dos mais importantes na Matemática, pois agrega noções básicas como o de contagem (BARRETO, 2008). De acordo com as Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN+, na esfera escolar, as funções, em específico a função afim, referem-se a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASL, 2006, p.121).

Além disso, a função afim tem um potencial explicativo que permite o aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos em relação a fatos e questões desse mundo (BRASL, 2006).

5 Papel da função na compreensão e/ou desenvolvimento em outras áreas do conhecimento

Ao questionar alunos de duas turmas do Ensino Médio, Dornelas (2015) em sua pesquisa mostra que a maior parte dos alunos veem funções apenas em física, química e matemática, ou seja, há pouca relação de função com outras disciplina para estes alunos.

A interdisciplinaridade tem um papel fundamental para compreensão e visão do aluno, diante disso, para os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN a função deve ser ensinada com a finalidade de desenvolver a compreensão de outras áreas do conhecimento e do cotidiano, buscando a relação entre as representações algébricas e as variáveis.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia (BRASIL, 2006, p. 43-44).

Portanto, ao ensinar matemática almeja-se que o aluno adquira flexibilidade para poder lidar com as diversas situações que envolvem o conceito de função, seja através de situações-problema de matemática ou de outras áreas (BRASIL, 2006). Ainda para Brasil (2006) “o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática”.

6 Papel no cotidiano

Para que ocorra um aprendizado maior, é conveniente que o professor utilize metodologias que facilitem o modo com que os alunos compreendam esse conteúdo, para isso, o uso de aplicações pode colaborar para um maior êxito nessa tarefa, visto que

As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realístico, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe... (LIMA, RPM 41, p. 4 apud ALVES, 2012).

Assim como Alves (2012) expõe, a função afim possui muitas aplicações no cotidiano, desde o tamanho do pé em relação ao número do calçado e a relação do tempo percorrido em um serviço de táxi com o valor a pagar, até fenômenos biológicos, como intensidade de luz que uma planta recebe em relação à intensidade da fotossíntese que ela realiza. As aplicações são úteis porque relacionam a teoria com a prática, evidenciando a matemática no nosso dia-a-dia, mesmo que de modo implícito em muitas situações, também colaboram para que o aluno compreenda as leis de formação, de modo que seja o próprio autor do seu conhecimento e o professor, mediador entre o aluno e o conhecimento, conforme Almouloud (2009).

7 Concepções iniciais e finais do ensino

Um estudo feito por Dornelas (2015) com duas turmas de alunos mostrou que ao perguntar para os alunos o que entendem por função, apenas 13% tiveram alguma noção do que é função, estes alunos correlacionaram função a uma relação de dependência e a maioria afirma que não sabem o que é função, dentre os outros alunos, alguns relacionam com equação e resolução de problemas. Em outro questionário, realizado com os mesmos alunos, 38% dos alunos afirmam que seu conhecimento sobre função é regular, 31% afirmam que é ruim e 19% que seu conhecimento é ótimo.

Além disso, neste mesmo estudo, Dornelas (2015, p. 32) mostra que de 16 alunos que responderam sobre a classificação de função afim, 9 acertaram a classificação, 4 erraram e 3 não responderam. E neste mesmo questionário,

a única função que a maioria conseguiu classificar foi a função afim, quando trabalhado com a função sendo algo que dependa do x . O que vem de encontro ao que foi dito 33 sobre a dificuldade apontada para caracterizar uma função J dita como dependente de L . Ponte, Branco e Matos, (2008) discorrem sobre a utilização de uma mesma letra para identificar uma incógnita, “Note-se que um uso exclusivo das letras x ou n pode criar nos alunos a dificuldade em lidar com outras letras no papel de variáveis e incógnitas [...]”. (DORNELAS, 2015, p. 32-33)

Este trabalho conclui que foi possível verificar que os alunos não compreendem bem o conceito de função e de dependência de uma variável. Ainda a maioria não conseguiu resolver expressões de primeiro grau e tiveram dificuldade em questões fundamentais de matemática, como as quatro operações .

De acordo com Fonte (2002), a dificuldade de entendimento da forma algébrica com outras representações da função, como exemplo o gráfico da função é um dos erros cometidos pelos alunos ao se apropriarem da noção de função. Também é citado a falta de compreensão da função afim como uma reta de infinitos pontos, do mesmo modo não há compreensão entre a conexão do plano cartesiano com a função e além disso, uma função dada por apenas uma constante normalmente não é vista como uma função e sim como um número qualquer. Diante dessas dificuldades encontradas, para que o aluno atinja a concepção desejada sobre o novo saber, será observável que o aluno consegue

Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situação-problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática. Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana. Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes. Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas. Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis. (BRASIL, 2006, p. 122).

Diante disso, faz-se necessário uma abordagem que relacione todas as diferentes representações das funções, de modo que permita “ao aluno estabelecer uma relação com o saber visado” (ALMOULOU, 2009, p. 992).

8 Situação-problema e análise a priori

Situação-problema 1

Johann Wolfgang Von Goethe, escritor e pensador alemão que viveu entre os séculos XVIII e XIX, fez parte do romantismo e do expressionismo, porém também foi contribuinte para a evolução da ciência, fez pesquisas sobre óptica, a geologia, a mineralogia, a botânica e a zoologia. O trecho da poesia *Gefunden* (1813), traduzida como “Eu andava na floresta, despreocupadamente. E nada encontrar era meu intento... (N. do T.)” (apud KARLSON 1961).

Fonte: Adaptado Karlson (1961)

O viajante da poesia estava a caminhar na floresta, sabendo que ele se deslocava 75 centímetros a cada passo que realizava então:

- a) Se ele der 2 passos, quantos metros ele irá percorrer? E 4 passos?
- b) Se ele der 12 passos, quantos metros ele irá percorrer? E 14 passos?
- c) Se ele der 50 passos, quantos metros percorrerá?
- d) Construa uma tabela com os dados encontrados.
- e) Supondo que a floresta tenha 225 metros de comprimento, quantos passos seriam necessários para atravessá-la?
- f) Quais foram os padrões observados nos itens a, b e c? Como podemos saber quantos metros o viajante percorreu se ele deu uma quantidade muito grande de passos?
- g) Supondo que o viajante esteja no marco de 75 metros, quantos passos faltam para chegar ao fim da floresta?

Análise *a priori*

A atividade foi elaborada com o propósito de envolver vínculos a partir da história de Goethe, introduzindo um conceito novo que a princípio fica implícito para os alunos, para poder ser trabalhado de maneira em que eles criem seus próprios conhecimentos. Também foi elaborada para que os alunos trabalhem com proporção, utilizando o conhecimento já adquirido anteriormente, analisando a proporção entre o quanto ele anda (em metros) com a quantidade de passos que ele realizará.

Analisando os métodos matemáticos utilizados para a realização da tarefa dada, inicialmente, no item “a” os alunos deverão utilizar raciocínio dedutivo, refletindo que em um passo ele caminha 75 centímetros, então em dois passos caminhará 150 centímetros, contudo a questão solicita a resposta em metros, para isso serão necessários conhecimentos prévios de medidas, assim, sabendo que um metro possui cem centímetros, o aluno dirá que o viajante caminhará 1,5 metros. Seguindo desta maneira na resolução das próximas questões, de maneira que eles se engajem num processo de resolução de problemas. Caso os alunos não encontrem essa resposta será necessária a mediação do professor dando dicas para facilitar o raciocínio do aluno, encontrando qual dificuldade ocorreu na resolução do problema e uma maneira que os ajude na visão desse problema.

Para a resolução do item “d”, é necessário que o professor incentive os alunos a anotarem os resultados obtidos nos primeiros exercícios para facilitar a construção da tabela. Já no item “e” os alunos devem pensar em uma maneira de encontrar a quantidade de passos que seriam necessários para atravessar a floresta, diante disso eles precisam perceber que cada passo é 0,75 metros, portanto, para encontrar o total de passos deverá dividir 225 metros (distância total para atravessar a floresta) por 0,75 metros (distância dada a cada passo), encontrando assim 300 metros.

No item “f”, será realizado um debate com os alunos, pedindo se encontraram padrões e quais foram estes padrões, analisando as opiniões que cada um tem, instruindo-os a encontrar uma forma genérica para a resolução desse problema. Nesse momento será necessária intervenção do professor, caso os alunos mudem a direção do debate, utilizando novas perguntas, sem prejudicar a maneira com que os alunos estão participando da atividade proposta. No fim, desejamos que os alunos encontrem a expressão $f(x) = 0,75x$, onde $f(x)$ é o número de passos dados pelo viajante. Neste momento o professor poderá sanar dificuldades e tirar dúvidas, homogeneizando o saber dos alunos do mesmo modo que ocorra também o progresso individual, de modo que o debate permita aos alunos estabelecer relação entre suas produções, sobretudo para aqueles que não encontraram o padrão, o professor dará uma maneira de visualizar a ideia de que a distância andada está em funções da quantidade de passos, estabelecendo ligações entre os conteúdos abordados.

No item “g”, será utilizado os dados da letra “e”, inserindo a função afim, através da expressão algébrica encontrada no item anterior somada a uma constante 75 metros, ou seja, $f(x) = 0,75x + 75$ explicando para os alunos que o total $f(x)$ deve ser mantido como 225 metros, pois o tamanho da floresta continua sendo a mesma, porém com uma restrição de que o viajante já teria caminhado 75 metros.

Para que essa atividade seja bem-sucedida, os alunos devem se envolver durante a resolução do problema, por isso foi escolhido um problema que trouxesse uma história por trás do problema, construindo seu novo conhecimento de maneira gradativa e significativa. O professor pode propor que a atividade seja trabalhada em duplas, para que os alunos possam ter um contato com o conhecimento dos colegas, facilitando a troca de experiências e aumentando assim as fontes de saber que os alunos terão. Caso ocorra bloqueio da parte de algum aluno, será necessária intervenção do professor, de modo a questionar o aluno, adotando uma postura ética e empática, tentando resolver as barreiras entre o professor e o aluno, analisando o meio social e externo do aluno, de modo que ele se sinta livre a questionar e diminuir a barreira com a aprendizagem.

Situação-problema 2

Um banho de chuveiro elétrico de 15 minutos com o registro “meio aberto”, consome 45 litros de água. Se fecharmos o registro, enquanto nos ensaboamos, reduzimos o tempo para 5 minutos e o consumo cai para 15 litros. Em uma residência onde mora apenas uma pessoa toma um (1) banho por dia, existe uma caixa de água de 600 litros. Esta água pode ser aproveitada apenas para tomar banho. Utilizando o método reduzido para o mesmo:

- a) Quanto vai restar de água na caixa de água depois de 7 dias, 25 dias e 32 dias?
- b) Quantos dias são necessários para que a água da caixa acabe?
- c) Se quiséssemos calcular para x dias, como faríamos?

Análise *a priori*

Esta atividade foi elaborada visando a interdisciplinaridade, ao tratar da conscientização com a economia de água. O desenvolver desta situação-problema utilizará pelo menos uma hora aula, levando em conta a resolução dos alunos e os impasses que encontrarão na mesma. O item “a” visa estabelecer uma relação entre o gasto de água em determinados dias e a diferença entre o total da caixa de água com o gasto em determinados dias, para isso, o aluno poderá utilizar a proporção ou a multiplicação direta entre 15 litros e a quantidade de dias a ser calculado o gasto em litros, com este resultado, espera-se que efetue a diferença entre 600 litros e o produto obtido anteriormente.

O item “b” foi pensado para que fique de forma implícita o conceito de raiz (ou zero) da função afim. Para posteriormente poder introduzir esta nova abordagem. Para resolver este item, o aluno utilizará, provavelmente, regra de proporção, isto é, poderá pensar que “15 litros estão para 1 dia, assim como 600 litros estão para x dias”, contudo podem também encontrar quociente de $\frac{600}{15}$, os alunos que usarem a proporção para resolver, poderão encontrar dificuldade para resolver a equação que obtiver na regra de proporção.

No item “c”, os alunos apresentarão maior dificuldade, uma vez que se trata de um valor arbitrário para a quantidade de dias, haja vista que no item anterior foi trabalhado com uma incógnita, talvez os alunos terão maior facilidade em encontrar a expressão que satisfaça o enunciado. Muito provavelmente, vários deles farão da seguinte maneira: se x são os dias que quero calcular o valor do gasto de água, então para estes dias devo fazer $600 - 15x$.

Diante dos resultados obtidos nas resoluções dos itens nas duas situações-problemas, podemos introduzir o conceito de função, estudo do gráfico, domínio, imagem, contradomínio. Por exemplo, ao trabalhar com o domínio, podemos perguntar aos discentes quais são os valores de x para que o valor do gasto não exceda a quantidade total da caixa. Além disso, ao trabalhar com alguns conhecimentos prévios, estamos visando a aprendizagem de modo significativo, baseado em David Ausubel (AUSUBEL et al, 1990), comentado por Moreira (2011):

Aprendizagem Significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé da letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende (MOREIRA, 2011, p. 13).

Os conhecimentos prévios essenciais para a produção do novo conhecimento são denominados por Ausubel como subsunçores, que estão presentes na estrutura cognitiva do aluno, e a interação dos subsunçores com o novo conceito que está sendo ensinado permitirá a maior clareza ao novo conhecimento.

9 Avaliação

Fiorentini (1995) realizou um estudo da relação entre o professor, aluno e o saber matemático, a partir deste estudo o autor estabeleceu uma descrição de seis tendências que influenciam o modo de conceber o ensino da matemática: formalista clássica, empírico-ativista, formalista moderna, tecnicista, construtivista e sócioetnocultural.

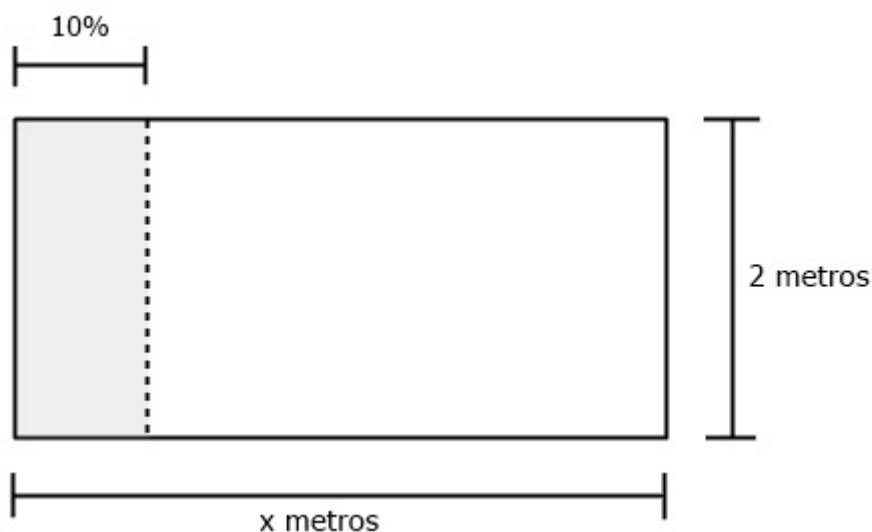
Utilizaremos como base para a avaliação a tendência empírico-ativista e sócioetnocultural. A tendência empírico-ativista refere-se a aprendizagem do aluno através de situações que surjam diante do interesse dos alunos, desta forma a avaliação se dará através da observação do discente resolver os problemas propostos. A tendência sócioetnocultural baseia-se no sentido de que a matemática é algo presente no cotidiano dos alunos, com isso, as situações-problemas evidenciam que a matemática está em simples aspectos de nossa vida, para exemplificar:

Quando a gente desperta, já caminhando para o banheiro, a gente já começa a fazer cálculos matemáticos. Quando a gente olha o relógio, por exemplo, a gente já estabelece a quantidade de minutos que a gente tem para, se acordou mais cedo, se acordou mais tarde, para saber exatamente a hora em que vai chegar à cozinha, que vai tomar o café da manhã, a hora que vai chegar o carro que vai nos levar ao seminário, para chegar às oito. Quer dizer, ao despertar os primeiros movimentos, lá dentro do quarto, são movimentos matematicizados. (apud D'Ambrosio, 2004).

Conforme os argumentos mencionados acima, a avaliação da aprendizagem dos alunos será feita através da observação das estratégias utilizadas por eles para resolver as situações-problema e, também, através da seguinte situação:

(Adaptado Enem) Em uma loja, os tecidos são vendidos de maneira que a largura tenha tamanho fixo e comprimento que varie de acordo com a necessidade do cliente. Ao comprar um tecido, um cliente solicitou que tivesse 2 m de largura e um total de $6m^2$ de área, sabe-se que este tecido escolhido pelo cliente encolhe 10% do comprimento após a primeira lavagem, o tecido está representado na figura 1.

Figura 1: Tecido



Fonte: Acervo dos autores

Então:

- a) Quanto mede o comprimento do tecido?
- b) Qual a área do tecido após a primeira lavagem?
- c) Quanto o tecido perdeu em seu tamanho após a primeira lavagem?
- d) Apresente uma função que relacione a área após a primeira lavagem com o comprimento.
- e) Qual o comprimento que deve ser comprado para que a área após a lavagem seja de $6m^2$?

Nestas perguntas, percebe-se que há relação com o conteúdo de porcentagem, cujo mesmo antecede a abordagem de função afim, logo, há algum conhecimento prévio a respeito de porcentagem, contudo, se houverem dúvidas na construção da resolução na parte de porcentagem, estaremos dando auxílio ou dicas para que o aluno tenha novas ideias ou ainda retome o conceito de porcentagem de forma que facilite a resolução do problema proposto.

Além disso, visando a melhora da relação professor-aluno, será realizada uma discussão de maneira que a avaliação seja através da comunicação, tanto das situações-problema 1 e 2, quanto da atividade avaliativa, pois como sugere Silva (2009) “a avaliação escolar tem como única finalidade melhorar o desenrolar a ação e torná-la mais condizente com o seu projeto” de forma a incluir os alunos proporcionando participação e construção de conhecimentos. Através dos resultados obtidos com essa discussão, iremos mediar formas de sanar as suas dificuldades, introduzindo dicas para que possam estabelecer relações com o que o aluno sabe sobre o assunto e suas dificuldades, ou seja, intuir o aluno a procurar meios de conseguir ultrapassar as barreiras que evitam a aprendizagem.

10 Considerações finais

As situações-problema foram aplicadas em uma turma da segunda série do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná Unioeste, os alunos desta turma deveriam realizar uma análise teórica da aula e sugestões para revisão deste conjunto de tarefas. Este passo foi baseado na análise *a posteriori* por meio de *feedback* - análise dos alunos da segunda série - levando em consideração as possíveis modificações pautadas nas interações dos alunos (ALMOULOU, 2009).

Durante a aplicação das situações-problema e avaliação, percebeu-se que, de maneira inicial, o conteúdo trabalhado ficou de modo implícito para os alunos, mas como os estudantes já conheciam este conteúdo, aos poucos foram percebendo as relações das situações-problema com o conceito abordado. Foi notório também o papel do contrato didático nessa abordagem, definido por Guy Brousseau (1980 apud ALMOULOU, 2007) “(...) como o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperados pelo professor”, mostrando-se necessário a ruptura do mesmo durante a aplicação das situações-problema, de modo a evitar possíveis efeitos do contrato didático.

Com os resultados obtidos em sala de aula, juntamente com o *feedback*, foi possível estabelecer um novo olhar sobre a construção do ensino deste conteúdo, pois permitiu modificar alguns enunciados que, ao serem aplicados em uma turma de 1 ano de ensino médio, poderiam ser interpretados equivocadamente. Além disso, tais modificações permitiram evitar possíveis comportamentos que não estavam previstos na análise *a priori*, para aproximar ainda mais o aluno das concepções finais do ensino nesta abordagem.

Referências

- ALMOULOU, S. A. Atividades Para O Ensino De Matemática Na Perspectiva Da Didática Da Matemática. In: **Encontro Paranaense De Educação Matemática**, 10., 2009, Guarapuava. Anais. Guarapuava: Sbem, 2009. p. 992 - 1002.
- ALVES, J. P. da S. **A Função Afim e Suas Aplicações**. 2012. 38 p. Monografia (Especialização) - Curso de Licenciatura Matemática, Universidade Estadual de Paraíba, Campina Grande, 2012.
- BARRETO, M. M. **Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários**. Dissertação de Mestrado. PPG-Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre. 2008.
- BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

D'AMBRÓSIO, U. **Por que se ensina matemática?** Texto de curso a distância, promovido pela SBEM. Disponível em: www.sbem.com.br. Acesso em: 24 mar. 2004.

DORNELAS, Ramon Guilherme Flávio. **Investigação do processo ensino-aprendizagem de funções, para alunos do primeiro ano do Ensino Médio.** 2015. 62 f. TCC (Graduação) - Curso de Física Licenciatura, Ufu - Universidade Federal de Uberlândia Física Licenciatura - Infis, Uberlândia, 2015.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.** Revista Zetetiké. Ano 3, n. 4, abril, 1995, p. 1-38.

FONTE, R. B. **Algumas Concepções e Dificuldades sobre o Ensino-Aprendizagem de Funções Envolvendo os Contextos Algébrico e Gráfico e a Conexão entre os Mesmos.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Rio de Janeiro: PUC - Rio, 2002.

KARLSON, P. **A Magia dos Números.** Porto Alegre: Globo, 1961.

MAGARINUS, R. **Uma Proposta Para o Ensino de Funções Através da Utilização de Objetos de Aprendizagem.** 2013. 99 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MOREIRA, M. A. **O que é a Aprendizagem significativa afinal? Instituto de Física.** UFRGS. Porto Alegre- Rio Grande do Sul (2011).

MOTA, S. C. **Função afim no cotidiano.** 2010. 55 f. Monografia (Especialização) - Curso de Especialização Matemática. Mídias Digitais e Didática: Tripé Para Formação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, São Gabriel, 2010.

PAIVA, M. **Matemática Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. 304 p.

Equação do Calor

Fernanda Paula John
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus Cascavel
ferpjohn@gmail.com

Sandro Marcos Guzzo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus Cascavel
smguzzo@gmail.com

Resumo: A equação do calor é um modelo matemático para a difusão de calor em sólidos. Tal modelo consiste em uma equação de derivadas parciais, que muitas vezes é também chamada de equação da difusão térmica. Neste trabalho faremos um breve estudo sobre a equação do calor. Apresentando a dedução da equação, a resolução para a ordem inteira e fracionária, para isso, utilizaremos a Transformada de Laplace e a Derivada Fracionária de Caputo.

Palavras-chave: Equação do Calor; Transformada de Laplace; Derivada Fracionária de Caputo.

1 Introdução

As equações diferenciais parciais constituem uma importante ferramenta para resolução de problemas amplos, como o fenômeno da Equação do Calor, que descreve o fluxo do calor em um corpo sólido.

O calor, também chamado de energia calorífica, é um conceito da área da física que determina a troca de energia térmica entre dois corpos. Essa transferência de energia tem a finalidade de atingir o equilíbrio térmico entre dois corpos, ou seja, a mesma temperatura. Assim, o corpo mais quente transfere calor para um corpo mais frio, até ambos terem a mesma temperatura.

A equação clássica de calor baseada na lei de Fourier é amplamente utilizada em engenharia. Esta equação calcula a velocidade de propagação do calor com tempo infinito. Para obter a velocidade de propagação térmica com tempo finito, a equação de Cattaneo foi usada no lugar da lei de Fourier. Pesquisas recentes mostraram que embora essa equação resolva um problema, pode introduzir outras propriedades que não são interessantes na física. Segundo Zhanga et al. (2013), Bai e Lavine notaram que isso poderia fornecer temperaturas menores que zero absoluto se o tamanho do domínio estiver na ordem do caminho livre médio de um fonon. Körner e Bergmann demonstrou que a razão que deu uma solução não física foi que a abordagem hiperbólica do calor a densidade atual violou a lei fundamental da conservação de energia. Rubin também provou que a equação de Cattaneo pode violar a segunda lei da termodinâmica, pois pode prever que o calor flua de regiões frias para quentes em um período de tempo finito.

Nos últimos anos, vários pesquisadores introduziram modelos fracionais de fluxo de calor que levam a equações de calor fracionárias. Compte e Metzler propuseram equações de Cattaneo

generalizadas fracionárias de tempo e ainda deram uma introdução física a elas. Povstenko seguiu o trabalho de Compte e Metzler, e formulou uma teoria correspondente das tensões térmicas. Recentemente, H. Qi, H. Xu, X. Guo, usaram o modelo de Cattaneo fracionário para simular o aquecimento por pulso curto a laser de uma superfície sólida.

O objetivo desse trabalho é fazer um estudo sobre a Equação do Calor, trazendo conceitos e definições do Cálculo Diferencial e Integral e do Cálculo Fracionário. Para essa parte utilizaremos Boyce e Diprima (2012), Nagle et al. (2012), Zill e Cullen (2001), Camargo e Oliveira (2015) e Ishteva (2005). Apresentaremos também a dedução da Equação do Calor de ordem inteira, baseada em Poczapski (2011) e Nagle et al. (2012), e a sua resolução por meio da Transformada de Laplace. Mostraremos ainda, estudos acerca da Equação Fracionária do Calor, baseados em Sharma e Bairwa (2015) e Zhanga et al. (2013), para isso utilizaremos conceitos do Cálculo Fracionário.

2 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace faz parte de uma família de transformadas dadas pela expressão

$$(T(f))(s) = \int_I K(s, t) f(t) dt,$$

em que I é o intervalo de integração e $K(s, t)$ é uma função, chamada núcleo da transformada.

Logo, uma transformada é um operador que “toma” uma função definida no intervalo I e transforma em uma outra função, desta vez na variável s .

Definição 1. Dada a função f , definida em todo o intervalo $(0, \infty)$, a Transformada de Laplace de f é a função representada por

$$\mathcal{L}(f) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(f(t))$$

dada por

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

desde que a integral exista.

Proposição 2. Se f é uma função cujas transformadas de f e de f' existem em um intervalo I , então

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Boyce e Diprima (2012).

Se as transformadas de f , f' e f'' existem, podemos usar duas vezes essa proposição para obter

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

3 Cálculo Fracionário

Nesta seção, discutiremos a definição de integral fracionária dada por Riemann-Liouville e algumas propriedades.

Durante toda seção, usaremos o símbolo $\frac{d}{dt}$ para designar o operador derivada de uma função (derivável) e o operador J para designar o operador integral de uma função (integrável) em um certo intervalo $[a, b]$. Desta forma, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{df}{dt}(t) = f'(t),$$

e

$$(Jf)(t) = J(f)(t) = J(f(t)) = \int_a^t f(s)ds.$$

Derivações e integrações sucessivas são portanto definidas recursivamente por

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t) \right)$$

e

$$(J^n f)(t) = J((J^{n-1}f)(t)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$.

A próxima proposição expressa um resultado do cálculo diferencial e integral clássico, conhecido como identidade de Cauchy para integrais repetidas, que motiva a definição da Integral fracionária de Riemann-Liouville.

Proposição 3. (*Identidade de Cauchy*). Se f é uma função integrável em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então

$$(J^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Ishteva (2005). A Identidade de Cauchy é a base para a definição da integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville. O lado direito da expressão ainda faz sentido se n for um número real positivo, exceto pela presença do fatorial. Neste ponto entra em cena a função Gama, conhecida como fatorial generalizado.

Definição 4. A função Gama é a função que a cada real positivo $x > 0$ associa o número real representado por $\Gamma(x)$ determinado pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{(x-1)} e^{-t} dt.$$

É possível mostrar que esta função está bem definida, isto é, que a integral imprópria converge qualquer que seja $x \in (0, \infty)$.

Dentre muitas propriedades importantes da função Gama, citamos que se $x > 0$, então $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Esta propriedade é conhecida como a propriedade do fatorial, pois no caso em que $x = n \in \mathbb{N}^*$, decorre desta igualdade que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ao substituirmos isso na Identidade de Cauchy, poderemos considerar n um número real positivo.

Definição 5. Suponha que f seja contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ da função denotada por $J_{a+}^\alpha(f)(t)$ ou por $(J_{a+}^\alpha f)(t)$ e definida por

$$J_{a+}^\alpha(f)(t) = (J_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Cabe ressaltar que a integral está bem definida, pois $f(s)$ e $(t-s)^{\alpha-1}$ são integráveis em $[a, t]$ qualquer que seja $\alpha > 0$.

A noção de derivada de ordem fracionária segundo Caputo, leva em conta a definição de integral fracionária de Riemann-Liouville. O leitor deve estar familiarizado pela definição anterior com a noção de integral fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 6. Seja $\alpha > 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n-1 \leq \alpha < n$. Se f é uma função contínua em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas em (a, b) , então a derivada fracionária de Caputo de ordem α de f , definida em $[a, b]$ é a função dada por

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha(f)(t) &= (D_{a+}^\alpha f)(t) = \left(J_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{ds^n} \right)(t) \\ &= (J_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f}{ds^n}(s) ds, \end{aligned}$$

sendo que J_{a+} se refere à integral fracionária de Riemann-Liouville e $\frac{d^n f}{ds^n} = f^{(n)}$ se refere à derivada de ordem n de f .

Outro resultado importante que precisamos é a Transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo.

Lema 7. Se $\alpha \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e f é uma função α derivável cujas Transformadas de Laplace de f existam e de $D_{a+}^\alpha(f)$ existam, então

$$\mathcal{L}(D_{a+}^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - s^{\alpha-1} f(0),$$

para todos $s > 0$.

A demonstração desse lema pode ser encontrado em Tieppo e Guzzo (2018).

O leitor interessado em estudos mais aprofundados ou outras propriedades sobre a função Gama e as derivadas e integrais de ordem fracionária, pode consultar Camargo e Oliveira (2015).

4 Equação do Calor

Estudaremos um modelo para fluxo de calor através de um fio fino e isolado, cujas extremidades são mantidas em uma temperatura constante de $0^\circ C$ e cuja distribuição inicial de temperatura deve ser especificada. Ainda, consideraremos apenas o caso onde o fio é unidimensional, pois, para os outros casos teríamos que realizar os cálculos com mais de uma variável, o que não é o intuito desse trabalho.

Suponhamos que o fio seja colocado ao longo do eixo x , com $x = 0$ na extremidade esquerda e $x = L$ na direita. Consideremos que u indica a temperatura do fio, então u depende do tempo t e da posição x dentro do fio. Vamos assumir que u é constante por toda a secção transversal correspondente a um valor fixo de x . Como o fio é isolado, assumimos que nenhum calor entra ou sai pelas suas laterais.

Para desenvolver o modelo para o fluxo de calor, vamos considerar o volume V entre dois planos transversais, com o plano A localizado em x e o plano B localizado em $x + \Delta x$. Assim, a temperatura no plano A no tempo t é $u(x, t)$ e no plano B é $u(x + \Delta x, t)$.

Vamos precisar dos seguintes princípios da física que descrevem o fluxo de calor:

1. Condução de calor: a taxa de variação do calor é proporcional a $\frac{\partial u}{\partial x}$, o gradiente de temperatura em A (lei de Fick). A constante de proporcionalidade k é chamada de condutividade térmica do material. Em geral, a condutividade térmica pode variar de um ponto para o outro, $k = k(x)$.
2. Direção do fluxo de calor: a direção do fluxo de calor é sempre dos pontos de maior temperatura para os pontos de menor temperatura.
3. Capacidade de calor específica: a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de um objeto de massa m por uma quantidade Δu é $cm\Delta u$, onde a constante c é a capacidade de calor específica do material. A capacidade de calor específica, assim como a condutividade térmica, pode variar com a posição $c = c(x)$.
4. Lei de Fourier para Transferência de Calor: a taxa de transferência de calor é proporcional ao gradiente de temperatura negativo.

$$q = -ka \frac{\partial T}{\partial x}$$

onde k é a condutividade térmica, a é a área da secção transversal do fio, T a temperatura e x é a direção do escoamento do calor.

Consideremos que H representa a quantidade de calor que flui da esquerda para a direita através da superfície de área a durante um intervalo de tempo Δt . Pela Lei de Fourier para transferência de calor, temos que a fórmula para condução de calor se torna

$$H(x) = -k(x)a\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

onde a é a secção transversal do fio. O sinal negativo vem do segundo princípio, se $\frac{\partial u}{\partial x}$ é positivo, então o calor flui da direita para a esquerda (do mais quente para o mais frio).

De modo análogo, a quantidade de calor fluindo da esquerda para a direita através do plano B durante um intervalo de tempo Δt é

$$H(x + \Delta x) = -k(x + \Delta x)a\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t).$$

A troca líquida de calor ΔE no volume V é a quantidade que entra na extremidade A menos a que sai da extremidade B , mais qualquer calor gerado pelas fontes (como correntes elétricas, reações químicas, aquecedores etc.). Esse último é modelado por um termo $Q(x, t)\Delta x a \Delta t$, sendo Q a densidade da taxa de energia (potência). Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta E &= H(x) - H(x + \Delta x) + Q(x, t)\Delta x a \Delta t \\ &= a \Delta t \left[k(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + Q(x, t)\Delta x a \Delta t.\end{aligned}\quad (1)$$

Pelo terceiro princípio, a troca líquida é dada por $\Delta E = cm\Delta u$, onde Δu é a mudança de temperatura e c é a capacidade calorífica específica. Consideremos que a mudança de temperatura no volume V é basicamente igual àquela em x , ou seja, $\Delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$, e que a massa do volume V do fio é $ap\Delta x$, sendo $p = p(x)$ a densidade do fio, então

$$\Delta E = c(x)ap(x)\Delta x[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)].\quad (2)$$

Igualando as duas expressões para ΔE dadas nas equações (1) e (2), obtemos

$$\begin{aligned}a \Delta t \left[k(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + Q(x, t)\Delta x a \Delta t \\ = c(x)ap(x)\Delta x[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)].\end{aligned}\quad (3)$$

Agora, dividiremos os dois termos da igualdade por $a\Delta x\Delta t$ e depois tomaremos os limites quando Δx e Δt tendem a zero, obtemos assim

$$\begin{aligned}&\frac{a \Delta t \left[k(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + Q(x, t)\Delta x a \Delta t}{a \Delta x \Delta t} \\ &= \frac{c(x)ap(x)\Delta x[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]}{a \Delta x \Delta t} \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} + Q(x, t) \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[c(x)p(x) \cdot \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \right] \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right] + Q(x, t) \\ &= c(x)p(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \right] \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + Q(x, t) = c(x)p(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).\end{aligned}\quad (4)$$

Se os parâmetros físicos k , c e p forem uniformes ao longo da extensão do fio, então (1) se reduz à equação unidimensional de fluxo de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + P(x, t),\quad (5)$$

onde a constante positiva $\beta = k/cp$ é a difusividade do material e $P(x, t) = Q(x, t)/cp$.

A equação (5) controla o fluxo de calor no fio. Temos duas outras restrições em nosso problema original. Primeiro, estamos mantendo as extremidades do fio a $0^\circ C$. Assim, exigimos que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (6)$$

para todo t . Estas são chamadas condições de contorno, ou de fronteira. Segundo, temos que obter a distribuição de temperatura inicial $f(x)$. Ou seja, exigimos que

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (7)$$

a equação (7) é denominada condição inicial sobre u .

Combinando as equações (5), (6) e (7), temos o seguinte modelo matemático para o fluxo de calor em um fio uniforme sem fontes internas ($P = 0$) cujas extremidades são mantidas na temperatura constante de $0^\circ C$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

$u(x, t)$ pode ser interpretada como a temperatura em um tempo t e em um ponto x de um fio de comprimento teórico infinito. A temperatura na extremidade do fio, $x = 0$, é igual a zero. No tempo $t = 0$, a temperatura é conhecida e dada pela função $f(x)$.

5 Resolução da Equação do Calor por Transformada de Laplace

Estamos interessados na solução do problema

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0 \\ u(0, t) = f_1(t), \quad u(L, t) = f_2(t) \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \quad 0 < x < L, \end{cases} \quad (8)$$

em que $u = u(x, t)$ e k é uma constante positiva.

Como o método previsto é o método da Transformada de Laplace, vamos considerar que existam as Transformadas de Laplace das funções $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ em relação à variável temporal t . De outra forma, existem as integrais impróprias

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt, \\ (\mathcal{L}u_x)(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_x(x, t) dt, \\ (\mathcal{L}u_{xx})(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_{xx}(x, t) dt, \end{aligned}$$

e de acordo com a fórmula de Leibniz,

$$(\mathcal{L}u_x)(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u_x(x, t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d}{dx} (\mathcal{L}u)(x, s),$$

$$(\mathcal{L}u_{xx})(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u_{xx}(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s).$$

Aplicando então a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação (8) obtemos da linearidade da Transformada que

$$(\mathcal{L}u_t)(x, s) - k^2(\mathcal{L}u_{xx})(x, s) = 0,$$

que usando a proposição (2) nos leva a

$$s(\mathcal{L}u)(x, s) - u(x, 0) - k^2 \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s) = 0,$$

e usando a condição inicial $u(x, 0) = g(x)$,

$$s(\mathcal{L}u)(x, s) - k^2 \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s) = g(x),$$

ou ainda,

$$k^2 \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s) - s(\mathcal{L}u)(x, s) = -g(x). \quad (9)$$

A equação (9) é uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem 2 na variável x , com coeficientes constantes em relação a x e portanto sua solução, baseada nas raízes da equação auxiliar $k^2 m^2 - s = 0$, é dada por

$$(\mathcal{L}u)(x, s) = c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{k} x\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{k} x\right) + G(x, s),$$

sendo que $G(x, s)$ é uma solução particular da EDO (9).

As constantes c_1 e c_2 são calculadas pelas condições de fronteira

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(0, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u(0, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt = (\mathcal{L}f_1)(s), \\ (\mathcal{L}u)(L, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u(L, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt = (\mathcal{L}f_2)(s). \end{aligned}$$

Substituindo $x = 0$ e $x = L$ na solução, temos que as constantes c_1 e c_2 devem satisfazer

$$c_1 + c_2 = (\mathcal{L}f_1)(s) - G(0, s),$$

e também

$$c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{k} L\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{k} L\right) = (\mathcal{L}f_2)(s) - G(L, s).$$

Notemos que c_1 e c_2 são constantes em relação a x . Resolvendo este sistema obtemos $c_1(s)$ e $c_2(s)$ e portanto u é solução da equação do problema (8) e satisfaz as condições de fronteira de (8), dada por

$$u(x, t) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left(c_1(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{k} x\right) + c_2(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{k} x\right) + G(x, s) \right) \right) (x, t).$$

6 Resolução da Equação do calor fracionária por Transformada de Laplace

Queremos agora voltar no problema (8) porém substituir a derivada em relação a t pela derivada fracionária $u^{(\alpha)}$, segundo a definição de Caputo, no caso em que $\alpha \in (0, 1)$. Lembremos que no caso em que $\alpha \in (0, 1)$ então assumiremos que

$$u^{(\alpha)}(t, x) = (D_{0+}^{\alpha} u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} u_s(x, s) ds.$$

Desta forma estamos agora interessados na solução do problema

$$\begin{cases} u^{(\alpha)} - k^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, 0) = f_1(t) \quad u(L, t) = f_2(t), \quad t > 0 \\ u(0, x) = g(x) \quad 0 < x < L, \end{cases} \quad (10)$$

em que $u = u(x, t)$, k é uma constante positiva, e $u^{(\alpha)}$ é a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ da função u em relação à variável temporal t .

Novamente utilizaremos o método da Transformada de Laplace. Vamos considerar que existam as Transformadas de Laplace das funções $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ em relação à variável temporal t . De outra forma, existem as integrais impróprias

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u)(x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt, \\ (\mathcal{L}u_x)(x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_x(x, t) dt, \\ (\mathcal{L}u_{xx})(x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_{xx}(x, t) dt, \end{aligned}$$

e de acordo com a fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u_x)(x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_x(x, t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d}{dx} (\mathcal{L}u)(x, s), \\ (\mathcal{L}u_{xx})(x, s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_{xx}(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s). \end{aligned}$$

Lembremos ainda que quando $\alpha \in (0, 1)$ então

$$(\mathcal{L}u^{(\alpha)})(x, s) = s^{\alpha} (\mathcal{L}u)(x, s) - s^{\alpha-1} u(x, 0) = s^{\alpha} (\mathcal{L}u)(x, s) - s^{\alpha-1} g(x).$$

Aplicando então a Transformada de Laplace em ambos os membros da equação (10) obtemos da linearidade da Transformada que

$$(\mathcal{L}u^{(\alpha)})(x, s) - k^2 (\mathcal{L}u_{xx})(x, s) = 0,$$

que nos leva a

$$s^{\alpha} (\mathcal{L}u)(x, s) - s^{\alpha-1} g(x) - k^2 \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}u)(x, s) = 0,$$

ou ainda,

$$k^2 \frac{d^2}{dx^2}(\mathcal{L}u)(x, s) - s^\alpha(\mathcal{L}u)(x, s) = -s^{\alpha-1}g(x). \quad (11)$$

A equação (11) é uma EDO de ordem 2 na variável x , com coeficientes constantes em relação a x e portanto sua solução, baseada nas raízes da equação auxiliar $k^2m^2 - s^\alpha = 0$, é dada por

$$(\mathcal{L}u)(x, s) = c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + G(x, s),$$

sendo que $G(x, s)$ é uma solução particular da EDO (11).

As constantes c_1 e c_2 são calculadas pelas condições de fronteira

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u)(0, s) &= \int_0^\infty e^{-st}u(0, t)dt = \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt = (\mathcal{L}f_1)(s), \\(\mathcal{L}u)(L, s) &= \int_0^\infty e^{-st}u(L, t)dt = \int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt = (\mathcal{L}f_2)(s).\end{aligned}$$

Tomando então $x = 0$ e $x = L$, as constantes c_1 e c_2 devem satisfazer

$$c_1 + c_2 = (\mathcal{L}f_1)(s) - G(0, s),$$

e também

$$c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}L\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}L\right) = (\mathcal{L}f_2)(s) - G(L, s).$$

Resolvendo este sistema, obtemos as constantes c_1 e c_2 que naturalmente dependerão de s . São constantes em relação à variável x . Determinadas então $c_1(s)$ e $c_2(s)$ a solução procurada deve satisfazer

$$(\mathcal{L}u)(s, x) = c_1(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + c_2(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + G(x, s),$$

e com isso

$$u(x, t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left(c_1(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + c_2(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s^\alpha}}{k}x\right) + G(x, s)\right)\right)(x, t).$$

Referências

- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Gen, 2012. 607 p.
- CAMARGO, Rubens Figueiredo; OLIVEIRA, Edmundo Capelas de. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- ISHTEVA, Mariya K. **Properties and applications of the Caputo fractional operator**. Master Thesis. 2005.
- NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012. 570 p.

POCZAPSKI, Loise D. **Série de Fourier e Transformada de Fourier com aplicação a reconstrução de imagem**. 2011. 59 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Licenciatura, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, Cascavel, Pr, 2011.

SHARMA, S. C.; BAIRWA, R. K. Iterative Laplace Transform Method for Solving Fractional Heat and Wave- Like Equations. **Research Journal Of Mathematical And Statistical Sciences**. Rajasthan, Índia, p. 4-9. fev. 2015.

TIEPPO, Sandra M.; GUZZO, Sandro M. Elementos do Cálculo Fracionário. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**. Maringá - Pr, p. 45-79. 2018.

ZHANGA, Wei; CAI, Xing; HOLM, Sverre. **Time-fractional heat equations and negative absolute temperatures**. Computers And Mathematics With Applications. Oslo, Noruega, p. 164-171. out. 2013.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Makron, 2001. 434 p.

Enumerabilidade dos conjuntos numéricos

Milena Cristina Heydt¹
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
milenaheydt@hotmail.com

Flavio Roberto Dias Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
frdsilva@yahoo.com.br

Resumo: Neste trabalho será apresentado um estudo dos conjuntos enumeráveis e algumas de suas propriedades com base na Análise Matemática. Isto será realizado a partir do estudo de conjuntos equipotentes e conjuntos infinitos. Ao final deste estudo mostraremos a enumerabilidade dos conjuntos dos números Naturais, Inteiros e Racionais e a não enumerabilidade dos conjuntos dos números Reais e Irracionais.

Palavras-chave: Conjuntos numéricos; conjuntos enumeráveis; Análise Matemática.

1 Introdução

Em seu estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas, Georg Cantor (1845-1918) investigou os conjuntos de pontos de descontinuidade destas funções, os mais simples continham um número finito de elementos, porém, conforme realizava seu estudo, viu a necessidade de investigar também, os conjuntos infinitos.

Cantor introduziu em seu estudo o conceito de conjuntos equipotentes, que segundo Ávila (2001), Cantor os definiu como sendo os conjuntos em que é possível estabelecer uma correspondência bijetora que leva elementos distintos de um conjunto a elementos distintos de outro conjunto.

Este conceito é de grande importância quando queremos estudar a enumerabilidade de conjuntos infinitos. Como não podemos contar seu elementos, faremos um estudo sobre conjuntos enumeráveis, nos quais é possível estabelecer uma função bijetora de um conjunto a outro, mostrando que possuem a mesma cardinalidade.

As definições, proposições e exemplos presentes neste trabalho podem ser encontradas nas obras: Ávila (2001), Lima (2017) (A), Lima (2017) (B) e Domingues (1982).

2 Conjuntos Infinitos e Conjuntos Equipotentes

Abordaremos algumas definições e propriedades sobre conjuntos equipotentes e conjuntos infinitos, para então definirmos conjunto enumerável.

¹A realização deste trabalho só foi possível pelo apoio financeiro da fundação araucária.

Definição 1. Sejam A e B conjuntos quaisquer, se existir a função bijetora $f : A \rightarrow B$, dizemos que A é equipotente a B , e escrevemos $A \approx B$. Dizer que dois conjuntos são equipotentes, segundo Ávila (2001), significa que estes conjuntos tem a mesma quantidade de elementos.

Observação 1. Seja A um conjunto qualquer, como existe a bijeção $id_A : A \rightarrow A$, concluímos que todo conjunto é equipotente a si mesmo. Logo, vale a propriedade reflexiva.

Observação 2. Se o conjunto A é equipotente a um conjunto B , ou seja, existe a função bijetora $f : A \rightarrow B$, então, como $f^{-1} : B \rightarrow A$ também é bijetora, B é equipotente a A . Assim, vale a propriedade simétrica.

Observação 3. Se A é equipotente a B e B é equipotente a um conjunto C , então, existem $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ ambas bijetoras, logo, $g \circ f : A \rightarrow C$ também é bijetora pois compõe-se de duas funções bijetoras. Logo, vale a propriedade transitiva.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos equipotentes:

Exemplo 1. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ são equipotentes, pois existe a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijetora, definida por $f(n) = n + 1$.

Exemplo 2. Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são equipotentes, pois existe a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n, \forall n \geq 0$ e $f(n) = -2n - 1, \forall n < 0$.

Definição 2. Seja A um conjunto, dizemos que A é infinito quando A não é equipotente a nenhum conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Quando A for vazio, ou equipotente a algum conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ com $n \in \mathbb{N}$, dizemos que A é finito.

Observação 4. Se $A \subset U$ é finito e se $x \in (U - A)$, então $A \cup \{x\}$ também é finito.

Observação 5. Se A é um conjunto infinito, então $A - \{x\}$ também é infinito, qualquer que seja $x \in A$.

3 Conjuntos Enumeráveis

Definição 3. De acordo com Lima (2017) (A), dizemos que um conjunto A é enumerável quando A é equipotente a algum subconjunto de $\mathbb{N}^*$, ou seja, quando existe $f : \mathbb{N}^* \rightarrow A$. E, escrevemos $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ tem-se então $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, cada bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, chama-se enumeração de A .

Exemplo 3. A bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ dada por, $f(n) = 2n$, mostra que o conjunto $\mathbb{P}$ dos números pares é infinito enumerável. O mesmo ocorre com o conjunto dos números ímpares. Temos a bijeção do conjunto dos números naturais sobre o conjunto dos números ímpares definida por, $g(n) = 2n + 1$, o que mostra que o conjunto dos números ímpares é infinito enumerável.

Exemplo 4. O Hotel de Hilbert sempre pode acomodar mais um viajante, até mesmo um número infinito. Os quartos de hotel são infinitos e enumerados utilizando o conjunto dos números naturais. Para acomodar um número infinito de hóspedes, é solicitado que cada hóspede

que está em um quarto n , vá para o quarto que é o dobro do número do seu quarto. Observemos que existe a função bijetora $f(n) = 2n$, que leva o hóspede do quarto n para o quarto $2n$, deste modo todos os quartos de números pares são ocupados, restando os quartos enumerados com números ímpares para os infinitos hóspedes que desejam ficar neste hotel. Observe que, vimos no exemplo anterior que o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares são ambos infinitos e enumeráveis, logo nenhum hóspede ficará sem quarto.

Observação 6. Todo conjunto finito é enumerável.

Observação 7. Podemos concluir dos exemplos 1 e 2, que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são enumeráveis, pois $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}^*$ e $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}^*$.

Agora, provaremos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Definição 4. Dado um conjunto M , uma partição em M é uma família $(M_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de M tais que: (1) $M_i \neq \emptyset$, (2) $\cup M_i = M$, (3) para quaisquer M_i e M_j , vale apenas uma das propriedades: $M_i = M_j$ ou $M_i \cap M_j = \emptyset$.

Definição 5. Admitamos dada uma partição $(M_i)_{i \in I}$ de M , existe um conjunto $L \subset M$ que contém um e só um elemento de cada M_i , L é chamado conjunto-escolha.

Neste momento serão apresentados alguns resultados sobre enumerabilidade de conjuntos quaisquer.

Proposição 6. Um conjunto A é enumerável se e somente se existe $L \subset \mathbb{N}^*$ e existe $f : L \rightarrow A$ sobrejetora.

Prova. Se A é enumerável, então existe $f : L \rightarrow \mathbb{N}^*$ nas condições enunciadas. Reciprocamente, se f for sobrejetora, seja $M \subset L$ um conjunto-escolha determinado pela partição $(L_a)_{a \in A}$ onde $L_a = \{x \in L; f(x) = a\}$, $\forall a \in A$. Obviamente $f|_M : M \rightarrow A$ é bijetora e como $M \subset L \subset \mathbb{N}^*$ então A é enumerável. $\square$

Proposição 7. Se existe $f : A \rightarrow B$ sobrejetora, e se A é enumerável, então B também é enumerável.

Prova. Se A é enumerável, existe $g : M \rightarrow A$ com $M \subset \mathbb{N}^*$, então $f \circ g : M \rightarrow B$ é sobrejetora, pois compõe-se de duas funções sobrejetoras. Então B é enumerável pelo resultado anterior. $\square$

Proposição 8. Todo subconjunto de um conjunto enumerável A é também enumerável.

Prova. Seja $B \subset A$ um conjunto diferente do vazio, fixemos $b \in B$. A função $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x$, $\forall x \in B$ e $f(x) = b$, $\forall x \in (A - B)$, é sobrejetora, e o resultado anterior garante que B é enumerável. $\square$

Observação 8. De acordo com Domingues (1982), todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é enumerável, por exemplo, o conjunto $K = \{2^m \cdot 3^n; m, n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.

Proposição 9. *São enumeráveis os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.*

Prova. A função $f : K \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(2^m \cdot 3^n) = (m, n)$ é sobrejetora, sendo K o subconjunto da observação anterior, então $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também é enumerável, e o mesmo ocorre com $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. $\square$

Proposição 10. *O conjunto $\mathbb{Q}_+^*$ dos números racionais maiores que zero é enumerável.*

Prova. Existe a função $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ definida por $f(m, n) = \frac{m}{n}$ sobrejetora, decorre que $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável. $\square$

Proposição 11. *Se $A_1, A_2, \dots$ são subconjuntos enumeráveis de um mesmo conjunto U , então $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ também é enumerável.*

Prova. Para todo $m \in \mathbb{N}$, A_m é enumerável, implica que existe uma função $f_m : \mathbb{N} \rightarrow A_m$ sobrejetora. Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$, tal que $f(m, n) = f_m(n)$ então se $y \in A$ implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in A_m$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = f_m(n)$ assim, existe $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $y = f(m, n)$, logo f é sobrejetora. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então A é enumerável. $\square$

Proposição 12. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Prova. Vale a partição $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-^*$, com $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q}; -x \in \mathbb{Q}_+^*\}$, os conjuntos $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-^*$ são equipotentes pois existe a função $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}_-^*$ definida por $f(x) = -x$, e portanto $\mathbb{Q}_-^*$ é enumerável. Logo $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-^*$ é enumerável. $\square$

Proposição 13. *Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Para a demonstração da proposição 13, seguiremos o raciocínio de Lima (2017) (B). Esta proposição será útil para mostrarmos que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Prova. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, que podemos reescrever como:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Chamemos de A o conjunto dos a_n e B o conjunto dos b_n . O conjunto A é limitado: a_1 é uma cota inferior e cada b_n é uma cota superior de A . Do mesmo modo, B também é limitado, pois cada a_n é uma cota inferior e b_2 é uma cota superior de B . Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é cota superior de A , temos $a \leq b_n$ para todo n . Assim, a é cota inferior de B e, portanto, $a \leq b$. podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a \leq b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluimos que a e b (podendo ser $a = b$) pertencem a todos os I_n , donde $[a, b] \subset I_n$ para cada n . Logo

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

E ainda, nenhum $x < a$ pode pertencer a todos os intervalos I_n . Com efeito, sendo $x < a = \sup A$, existe algum $a_n \in A$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin I_n$. De modo semelhante, $y > b \implies y > b_m$ para algum m , donde $y \notin I_m$. Concluimos que $\cap I_n = [a, b]$.

□

Proposição 14. *O intervalo $I = [0, 1]$ não é enumerável.*

Prova. Suponhamos I enumerável: $I = \{x_1, x_2, \dots\}$. Consideremos o intervalo I dividido em três subintervalos de mesma amplitude:

$$I = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

e seja I_1 o primeiro desses subintervalos, na ordem que foram escritos, que não contém x_1 . Façamos o mesmo tipo de subdivisão em I_1 e seja I_2 o primeiro subintervalo de I_1 (pelo critério anterior de ordenação) que não contém x_2 . A repetição desse raciocínio dará origem a uma sequência $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos fechados. Devido a proposição 13, existe

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cap I_2 \cap \dots$$

e portanto $x \neq x_i$, para todo x_i . Mas isto é impossível, uma vez que $x \in I$. Donde I não é enumerável.

□

Proposição 15. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Prova. A não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ resulta da proposição 14, pois se $\mathbb{R}$ fosse enumerável I também seria, visto que $I \subset \mathbb{R}$.

□

Proposição 16. *O conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) não é enumerável.*

Prova. Com efeito, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável, se $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ também o fosse, $\mathbb{R}$ seria enumerável por ser a reunião de dois conjuntos enumeráveis. Portanto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ não é enumerável.

□

Conclusões

Abordamos alguns resultados e definições fundamentais para o entendimento de forma simples de conjuntos enumeráveis. Após isto, mostramos a enumerabilidade dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e a não enumerabilidade dos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Além disso, percebemos como a introdução do conceito de conjuntos equipotentes de Georg Cantor em seus estudos sobre conjuntos infinitos foi de grande importância para o estudo da enumerabilidade dos conjuntos numéricos.

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Análise Matemática para licenciatura. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2001. 162 p.

DOMINGUES, Hygino Hungueros. Espaços métricos e introdução a topologia. São Paulo: Atual Editora, 1982. 196 p.

LIMA, Elon Lages. Análise Real. 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2017(A). 198 p.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017(B). 432 p.

Estudo de simetrias e regularidades em funções polinomiais cúbicas pela perspectiva da geometria analítica

Fernando Dias de Oliveira Heidercheidt
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
fernando.heidercheidt@unioeste.br

Resumo: Esta pesquisa tem por objetivo demonstrar algumas proposições a respeito de simetrias e regularidades do ponto de vista da geometria analítica presentes em funções polinomiais cúbicas que não são visíveis quando simplesmente se traça o gráfico de uma função desse tipo. A primeira demonstra que toda função polinomial de grau 3 pode ser rotacionada 180 graus em relação ao seu ponto de inflexão e ainda permanecer com a mesma imagem. A segunda proposição a ser demonstrada é que em uma função polinomial do terceiro grau com três raízes reais distintas de forma que nenhuma raiz é o ponto de inflexão, as retas tangentes à curva que passam em cada raiz tocam a curva em um outro ponto e esses três novos pontos são sempre colineares. A última proposição enuncia que se uma função polinomial cúbica tem três raízes reais, então existe uma circunferência com centro no eixo do ponto de inflexão e de diâmetro sendo a distância entre as raízes da derivada primeira, ou seja, a distância entre os pontos de máximo e mínimo locais da função e essa circunferência está sempre inscrita num triângulo equilátero cujos vértices são projetados nas raízes da função.

Palavras-chave: Equação cúbica; raízes reais de uma função polinomial cúbica.

1 Definições preliminares

Definição 1. Uma função polinomial de uma variável é dita de grau 3 quando escrita na forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ ou } f(x) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. (LIMA, 2012, p. 18)

Definição 2. A raiz de um polinômio é um número real atribuído à variável, cujo valor numérico é igual a zero, isto é, todo número real x tal que $f(x) = 0$. Esse número também é conhecido como zero da função.

Decorre do Teorema Fundamental da Álgebra que uma função polinomial de grau n possui n raízes complexas. Assim, se uma função polinomial tiver três raízes reais, ela pode ser fatorada como

$$f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e x_1, x_2, x_3 são zeros da função.

Definição 3. Um ponto que pertencente à imagem de uma função é dito de inflexão se neste ponto a concavidade da função for nula, isto é, $f''(x) = 0$.

A partir desta definição, é possível concluir que o ponto de inflexão de uma função polinomial cúbica é único, pois sua abscissa é solução de uma função polinomial de grau 1 que, por sua vez, possui solução única. Dessa forma, a abscissa da coordenada cartesiana desse ponto é dada por

$$f''(x) = 6\alpha x - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3). \quad (1)$$

2 Proposições a respeito de regularidades e simetrias

Enunciemos agora algumas as proposições que mostram algumas regularidades e simetrias escondidas das funções polinomiais cúbicas.

Lema 4. *Se o ponto de inflexão de uma função polinomial cúbica está centrado na origem, então f é ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$.*

Prova. Pela definição do ponto de inflexão e que $(0, 0)$ pertence à imagem de f , é fácil ver que $b = d = 0$. Assim, temos que $f(x) = ax^3 + cx = x(ax^2 + c)$. Logo,

$$f(-x) = (-x)[a(-x)^2 + c] = -x(ax^2 + c) = -f(x).$$

□

Observação 1. Uma interpretação geométrica desse fato, é que a curva gerada por f é simétrica em relação a esse ponto de inflexão, ou seja, uma rotação de 180° em relação à origem.

Proposição 5. *Todo ponto da imagem de uma função polinomial cúbica é simétrico em relação ao ponto de inflexão.*

Prova. Seja I o ponto de inflexão de f . Se $I = (0, 0)$, a demonstração está concluída. Portanto, parece uma boa ideia tentar trasladar o ponto de inflexão para a origem, se isso for possível, a demonstração estará feita. Começemos movendo o ponto de inflexão para o eixo y , isto é, substituindo x por $x - \frac{b}{3a}$, conforme feito por Andrade (2013, p. 115). Teremos

$$\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(x - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a},$$

abrindo os parênteses e ordenando em função de x ,

$$x^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right).$$

Note que essa função possui o coeficiente de x^2 nulo. Subtraindo o termo independente, obteremos uma função com ponto de inflexão centrado na origem. Pelo **Lema 4**, os pontos de f são todos refletidos em relação a I . □

Proposição 6. *Sejam x_i ($i = 1, 2, 3$) raízes reais de uma função polinomial cúbica tal que nenhuma delas seja ponto de inflexão. As retas r_i que passam, respectivamente, por x_i tangentes à curva de f interceptam f em mais um ponto P_i . Esses três pontos são sempre colineares.*

Esta demonstração será feita em três passos: determinar a equação de cada reta e de cada interseção com f e por último mostrar que essas três interseções são colineares.

Prova. Seja f a função polinomial fatorada $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. A equação de uma reta tangente em um ponto x_0 do domínio de uma função é dada por $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, calculando a derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)] \\ &= \alpha[3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Calculando as inclinações das retas tangentes nas raízes x_1 , x_2 e x_3 , ou seja, calculando a derivada nesses pontos, encontraremos $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ e $f'(x_3)$ como segue:

$$\begin{cases} f'(x_1) = \alpha(x - x_2)(x - x_3) \\ f'(x_2) = \alpha(x - x_1)(x - x_3) \\ f'(x_3) = \alpha(x - x_1)(x - x_2) \end{cases} .$$

Agora, apliquemos cada uma das derivadas na equação da reta tangente, obteremos

$$\begin{cases} y_1 = \alpha(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ y_2 = \alpha(x - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3) \\ y_3 = \alpha(x - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) \end{cases} , \text{ cujo termo geral é}$$

$$y_i = \alpha(x - x_i) \prod_{j=1}^3 (x_i - x_j), \quad i \neq j.$$

Dessa maneira, é possível calcular a diferença $f - y_i$ que resultará em uma nova função polinomial cúbica cujos zeros dessa função são as interseções de f com a reta y_i , mas essa reta foi construída de forma que x_i é uma raiz e, além disso, f tangencia y_i , então há uma raiz dupla em x_i . Logo, pelo Teorema de D'Alembert $f - y_i$ é divisível por $(x - x_i)^2$. Assim, dividindo $f - y_1$ por $(x - x_1)^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{f - y_1}{(x - x_1)^2} &= \frac{\alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - \alpha(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}{(x - x_1)^2} \\
 &= \frac{\alpha(x - x_1)[(x - x_2)(x - x_3) - (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]}{(x - x_1)^2} \\
 &= \frac{\alpha[(x - x_2)(x - x_3) - (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]}{(x - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha[x^2 - x_2x - x_3x + x_2x_3 - x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3]}{(x - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha[x^2 - x(x_2 + x_3) - x_1^2 + x_1(x_2 + x_3)]}{(x - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha[(x + x_1)(x - x_1) - (x - x_1)(x_2 + x_3)]}{(x - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha(x - x_1)[(x + x_1) - (x_2 + x_3)]}{(x - x_1)} \\
 &= \alpha(x + x_1 - x_2 - x_3).
 \end{aligned}$$

Este procedimento é análogo se utilizarmos $i = 2, 3$. Igualando o resultado da expressão a zero, obtemos as abcissas da interseção das retas tangentes com a função. A abcissa da interseção de x_1 e f é $x = x_2 + x_3 - x_1$, a de y_2 será $x = x_2 + x_3 - x_1$ e com y_3 tem-se $x = x_1 + x_2 - x_3$. Novamente, é possível defini-las por meio de um termo geral na forma

$$\sum_{j=1}^3 (x_j) - x_i, i \neq j.$$

Portanto, para cada coordenada da interseção da tangente com a função, tem-se:

$$P_i = \left(\sum_{j=1}^3 (x_j) - x_i, \alpha \left(\sum_{j=1}^3 (x_j) - 2x_i \right) \prod_{j=1}^3 (x_i - x_j) \right), i \neq j \text{ ou}$$

$$\begin{cases} P_1 = (x_2 + x_3 - x_1, \alpha(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)) \\ P_2 = (x_1 + x_3 - x_2, \alpha(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2)) \\ P_3 = (x_1 + x_2 - x_3, \alpha(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)) \end{cases} .$$

Mostremos agora que P_1 , P_2 e P_3 são colineares. O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ é

dado por

$$\begin{aligned}
 m_{P_1P_2} &= \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2) - \alpha(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)}{x_1 + x_3 - x_2 - (x_2 + x_3 - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha(x_2 - x_1)[(x_2 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2) + (x_1 - x_3)(x_2 + x_3 - 2x_1)]}{-2(x_2 - x_1)} \\
 &= \frac{\alpha(x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_2^2 - x_1x_3 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_1^2 - x_2x_3 - x_3^2 + 2x_1x_3)}{-2} \\
 &= -\frac{\alpha(2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_3^2)}{2} \\
 &= \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3).
 \end{aligned}$$

O mesmo procedimento é feito para o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{P_2P_3}$:

$$\begin{aligned}
 m_{P_2P_3} &= \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 + x_3 - 2x_2) - \alpha(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)}{x_1 + x_3 - x_2 - (x_1 + x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{\alpha(x_2 - x_3)[(x_2 - x_1)(x_1 + x_3 - 2x_2) + (x_3 - x_1)(x_1 + x_2 - 2x_3)]}{-2(x_2 - x_3)} \\
 &= \frac{\alpha(x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 - x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3)}{-2} \\
 &= -\frac{\alpha(2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_3^2)}{2} \\
 &= \alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3).
 \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes $m_{P_1P_2}$ e $m_{P_2P_3}$ são iguais. Logo, as retas $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ e $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ são paralelas ou coincidentes, mas ambas passam por P_2 , ou seja, são coincidentes. Portanto, os pontos P_1 , P_2 e P_3 são colineares conforme exemplo mostrado na Figura 1. $\square$

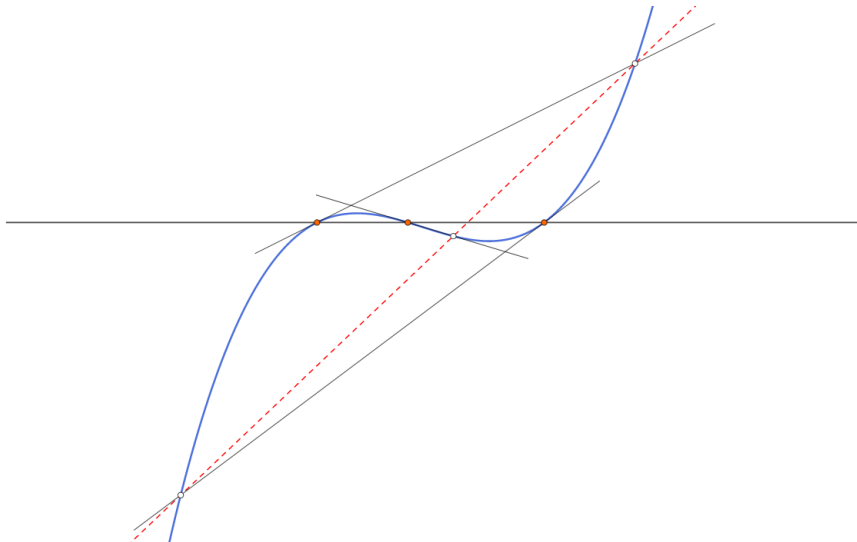


Figura 1: Interseções colineares das tangentes nas raízes da função

É possível fazer outra proposição a respeito de funções polinomiais cúbicas, Boesken (2016, p. 7) apresenta a seguinte proposição:

Proposição 7. *Seja f uma função polinomial com três raízes reais, então há um ponto sobre o eixo do ponto de inflexão de que f é centro de uma circunferência inscrita num triângulo equilátero cujas projeções dos vértices são as raízes dessa função tal que as bordas dessa circunferência estão projetadas nos pontos de máximo e mínimo locais de f .*

Prova. Sejam x_1 , x_2 e x_3 distintas dois a dois as raízes da função $f(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Abrindo os parênteses e das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} f(x) = \alpha[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3] \\ f'(x) = \alpha[3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)] \\ f''(x) = \alpha[6x - 2(x_1 + x_2 + x_3)] \end{cases}.$$

Resolvendo $f''(x) = 0$, encontramos o eixo do ponto de inflexão:

$$6\alpha x - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \Rightarrow 6\alpha x = 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Resolvendo $f'(x) = 0$ pela fórmula da equação quadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(x_1 + x_2 + x_3) \pm \sqrt{[-2(x_1 + x_2 + x_3)]^2 - 4 \cdot 3 \cdot \alpha(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}}{2 \cdot 3\alpha} \\ &= \frac{2(x_1 + x_2 + x_3) \pm \sqrt{4[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)] - 12(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(2(x_1 + x_2 + x_3) \pm \sqrt{4[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)]} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3} \right). \end{aligned}$$

Como todo ponto de inflexão é o ponto de simetria de acordo com a **Proposição 5**, isso significa que os eixos dos pontos que anulam a derivada primeira são equidistantes do ponto de inflexão cujo comprimento r sempre será:

$$r = \frac{1}{3} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3}$$

que é verificável calculando a diferença entre as duas raízes das derivadas primeiras. Além disso, possui a seguinte interpretação geométrica: existe uma circunferência de raio r com centro em um ponto qualquer do eixo $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$. Assim, por construção, os eixos das derivadas primeiras (ou os eixos dos pontos de máximo e mínimo locais de f) são tangentes à circunferência.

Consideremos o ponto de inflexão $I = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, 0 \right)$ no eixo x . Tomemos um dos vértices do triângulo distando $2r$ a partir do ponto I . isto é, satisfazer a equação da circunferência de centro I :

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3} \right)^2.$$

Isolando y teremos duas respostas possíveis, uma negativa. Podemos convencionar aqui a utilização apenas da raiz positiva (a raiz negativa de y também produzirá três vértices):

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3}\right)^2 - \left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) - x^2 + \frac{2}{3}x(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) - 9x^2 + 6x(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)^2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 9x^2 + 6x(x_1 + x_2 + x_3)}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 3x^2 + 2x(x_1 + x_2 + x_3)}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 3x^2 + 2x(x_1 + x_2 + x_3)}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + 3x)(x_1 + x_2 + x_3 - x) - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{3}}. \end{aligned}$$

Substituindo x pelas raízes x_1 , x_2 e x_3 chegaremos, respectivamente, nos vértices:

$$V_1 = \left(x_1, \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}}\right), V_2 = \left(x_2, \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{3}}\right), V_3 = \left(x_3, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}\right).$$

Verifiquemos agora que os pontos médios dos respectivos segmentos tangenciam, de fato, a circunferência:

$$M_{V_1V_2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}\right), M_{V_2V_3} = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_3 - x_2}{2\sqrt{3}}\right), M_{V_1V_3} = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{x_3 - x_1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Substituindo qualquer ponto ($M_{V_1V_2}$, por exemplo) na equação da circunferência de raio r :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3}\right)^2 - \left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) - \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3)}{9} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_1x_3}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2}{36}} = \sqrt{\frac{3(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{36}} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{12}} = \frac{|x_1 - x_2|}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Como havíamos convencionado anteriormente, tomamos a solução $y = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}$ por simplicidade, concluímos que $M_{V_1V_2}$ pertence à circunferência e ao segmento de vértices V_1 e V_2

simultaneamente. O processo é análogo para mostrar que os demais segmentos do triângulo $\triangle V_1V_2V_3$ são tangentes à circunferência construída.

Por último, mostremos que o triângulo é equilátero, isto é, $d_{V_1V_2} = d_{V_2V_3} = d_{V_1V_3}$:

$$\begin{aligned} d_{V_1V_2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}} - \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{(x_1 + x_2 - 2x_3)^2}{3}} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_3^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_3^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3}{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3). \end{aligned}$$

Realizando o mesmo cálculo para os pontos $V_1 = \left(x_1, \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}}\right)$ e $V_3 = \left(x_3, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}\right)$, encontramos:

$$\begin{aligned} d_{V_1V_3} &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}} - \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + \frac{(2x_2 - x_1 - x_3)^2}{3}} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + \frac{(x_1 + x_3 - 2x_2)^2}{3}} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + \frac{x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_2^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{3x_1^2 - 6x_1x_3 + 3x_3^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_2^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3}{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3). \end{aligned}$$

O procedimento é análogo para encontrar a distância entre os pontos V_2 e V_3 . Assim, podemos concluir que

$$d_{V_1V_2} = d_{V_1V_3} = d_{V_2V_3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3),$$

como queríamos mostrar. $\square$

A Figura 2 a seguir mostra uma representação geométrica da **Proposição 7**, uma função polinomial com três raízes reais que projetam um triângulo equilátero.

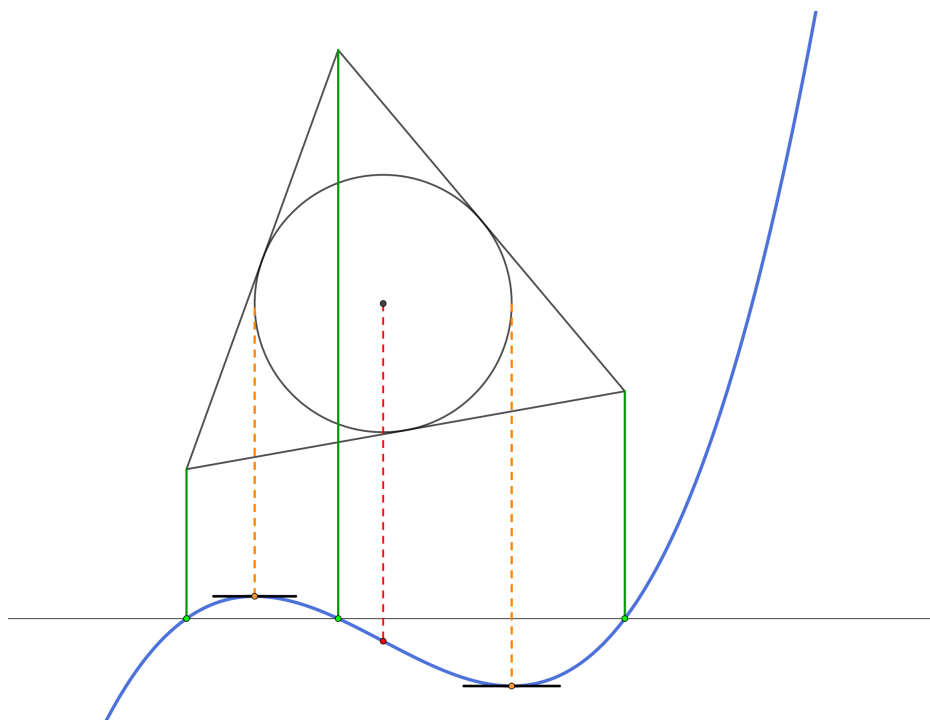


Figura 2: Projeção do triângulo equilátero nas raízes da função

Conclusões

Este é um fato muito interessante para funções polinomiais. Entretanto, é apenas um caso particular de uma generalização conhecida como o Teorema de Marden, que é estendida para os números complexos. Marden (1985, p. 9) provou que as raízes complexas de uma função polinomial cúbica determinam um triângulo no plano complexo (se os três pontos não forem colineares) e os três pontos médios desse triângulo são tangentes a uma única elipse inscrita a ele, de forma que os pontos focais dessa elipse são os máximos e mínimos da função e que o ponto médio do segmento formado pelos pontos focais é o ponto de inflexão da função. Isso nos induz a concluir que existe uma ligação entre o polígono construído pelas raízes da função e a elipse inscrita nele.

Referências

- ANDRADE, José Fernandes Silva. **Tópicos Especiais em Álgebra**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- BOESKEN, Xavier, **Geometry of Cubic Polynomials**. Mathematics (2016). 1. Disponível em: https://www.exhibit.xavier.edu/undergrad_mathematics/1
- LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- MARDEN, Morris. **Geometry of Polynomials**. 3. ed. Providence: AMS, 1985.

Utilização de softwares para construção de gráficos

Guilherme Vieira Bochi
Universidade do Oeste do Paraná
guilhermebochi@gmail.com

Resumo: O presente trabalho explica a metodologia adotada pelo autor (e o outro integrante da dupla) durante a regência de estágio. Foi adotada a metodologia tradicional e o uso da tecnologia, a qual foi mais abordada com um auxílio, pois com a utilização de projeção os alunos podem ter uma visão diferente de gráficos e sólidos geométricos. A partir dela, foi possível ver a participação dos alunos na sala de aula com dúvidas e sugestões.

Palavras-chave: Tecnologias; Geogebra; Estágio supervisionado.

1 Introdução

Durante o nosso período de estágio supervisionado de matemática realizado no ensino médio regular, nas turmas de 2ºA e 3ºA, a utilização de tecnologias foi fundamental para observarmos se o aproveitamento seria considerado satisfatório dos alunos das classes, nas quais ministramos as aulas. Na maioria das aulas, surgiam dúvidas desses alunos e conseguia-se mostrar outros exemplos, o que os ajudava. Para fazer tal escolha, nas observações que foram realizadas antes da regência, atentamo-nos ao que o aluno conseguia absorver durante as aulas.

Optamos por utilizar o método tradicional de ensino, o qual o professor tem maior papel na sala, mas de forma paralela a outra tendência matemática, isto porque, não queríamos que alunos apenas olhassem para o quadro e recebessem a informação, como se os professores tivessem toda a razão, queríamos que eles tivessem participação durante as aulas, que houvesse questionamento. Assim, como Freire (1996) escreveu: “tanto o professor quanto o aluno são sujeitos da produção do saber, convencendo-se de que ensinar não é apenas transferir conhecimento, mas criar um ambiente e possibilidades para a produção ou construção social do aluno”.

Durante esse processo de uso da tecnologia, esperávamos mais interações por parte dos alunos, além de perguntas inesperadas acerca do porquê e a aplicação do conteúdo que se ministrava. Levamos problemas que usavam os conceitos que foram aprendidos nos anos anteriores, utilizando a ideia da Metacognição, a qual é definida como: “conhecimento que o sujeito tem de seu próprio conhecimento, ou seja, o conhecimento dos próprios processo e produtos cognitivos, ou algo relacionado com eles”. (Justo 2012 apud. Figueira 2003)

Em concordância a essa ideia, queríamos que os alunos trouxessem os conhecimentos aprendidos anteriormente para que pudessem fazer associações com os conceitos que estavam sendo apresentados. Como em função trigonométrica, os alunos tinham que retomar algumas propriedades de funções e construção de gráficos.

Já o uso da tecnologia contribuiu em paralelo à metodologia tradicional, servindo de auxílio da construção e mostração dos conteúdos de funções trigonométricas e geometria. A partir da tecnologia utilizada, foi possível criar os objetos e gráficos junto com os alunos, possibilitando a eles escolherem a forma que o gráfico tomaria. Dessa forma, as dúvidas foram sendo sanadas na medida em que a tecnologia proporcionava tal experiência.

2 O uso da tecnologia como metodologia de ensino

O uso da tecnologia para o desenvolvimento do aluno deve ser bem trabalhado nas aulas de matemática, a partir dela o aluno pode notar que existem várias possibilidades, por exemplo, para a construção de um gráfico, resolução de uma equação e entre outras. Não ter apenas uma resposta direta, mas sim toda a sua resolução, o que é oferecido por alguns softwares de matemáticas disponíveis na internet.

Ainda, há diversos modelos de calculadoras e algumas são complexas de entender e manipular os comandos, o que pode dificultar o entendimento do conceito de quem está operando. Dessa forma, existe o receio de conceder e utilizar tecnologias em sala de aula, pois para o professor ensinar por meio de alguma tecnologia é necessário o domínio dela, Bittar afirma:

Consideremos um professor para o qual o software é desconhecido. Ao entrar em contato com este material que não conhece, não sabe manipular nem mesmo as ferramentas básicas, este software é, para este professor, um artefato. (BITTAR, 2011, p. 161).

A autora afirma ainda, que são poucos professores que incorporam o uso de tecnologias em sala de aula, mesmo tendo participado de cursos de formação e uso de ferramentas para ensinar matemática. Assim, na maioria, os professores atenuam-se apenas na utilização do quadro, uma aula tradicional, sem mostrar aos alunos que existem ferramentas que podem ajudá-los. Ou seja, o professor prefere se manter na zona de conforto dele.

Ao se trabalhar com esta metodologia, deve-se observar a estrutura que ela possui para a utilização dessa nova ferramenta de ajuda, ou seja, uma sala específica com computadores, conhecida comumente como a Sala de Informática, caso o professor queira ensinar o aluno a trabalhar em algum programa que o auxilie, entretanto a disponibilidade dessa sala não é de suma importância para a tecnologia, pois pode ser ensinado na própria sala de aula com a ajuda de um projetor. O espaço destinado a ela é importante para escola, trazendo novidades aos alunos, mas não é necessário que a mesma possua computadores de última linha ou uma imensa quantidade deles. Isto não é o objetivo da sala, pois o que se busca não é explorar todo o computador e encontrar tudo que existe nele, mas sim de proporcionar experiências satisfatórias, como afirma Cortella:

[...] a presença isolada e desarticulada dos computadores na escola não é, jamais, sinal de qualidade de ensino; mal comparando, a existência de alguns aparelhos ultramodernos de tomografia e ressonância magnética em determinado hospital ou rede de saúde não expressa, por si só, a qualidade geral do serviço prestado à população. É necessário estarmos muito alertas para o risco da transformação dos computadores no bezerro de ouro *â[sic]* ser adorado em Educação. (CORTELLA apud TEIXEIRA, 2012, p. 17).

Desviando o olhar da dificuldade do professor, e da estrutura observemos para interação do aluno ao utilizar a tecnologia ao seu favor e de que maneira isso vai ajudar em seu ensino. De acordo com Almiro:

... as novas tecnologias permitem encarar todo um novo estilo de actividades educativas onde os alunos são encorajados a desenvolver a sua autonomia, independência e espírito de iniciativa, esperando-se que o professor deixe de ser aquele que tudo sabe, para passar a ser um companheiro mais experiente e com mais entusiasmo acerca de cada assunto. (ALMIRO, 2004, p. 8).

Desse modo, o aluno pode se interessar pela utilização dessa nova ferramenta como apoio para a produção do seu próprio conhecimento. Como a construção de gráficos, cálculos extensos para checar suas respostas, manipulação de símbolos e outras propriedades que podem ser oferecidas com o software.

A partir da manipulação do software pelo aluno, ele pode executar diversas vezes o problema em questão e observar o que ocorre. Por exemplo uma questão que envolva geometria pode ser fácil de visualizar no computador, desde o plano até o espaço. Estes conceitos podem ser fortalecidos pelo aluno, o computador passa a ser um veículo de ensino-aprendizagem.

3 O uso da tecnologia no período da regência

Em nossa experiência de regência, utilizamos slides e o software GeoGebra; o primeiro para mostrar aos alunos os sólidos geométricos e o segundo para a construção de gráficos de funções trigonométricas com os alunos. Com o GeoGebra foi possível ter um rendimento maior na sala de aula, pois os alunos sempre questionavam o que aconteceria na função se existisse um número utilizando qualquer operação, dentro e/ou fora do argumento, pois aula se tratava de funções trigonométricas. Assim a participação deles se tornava maior e as dúvidas começavam a emergir. A malha do gráfico foi adaptada para radianos, para que os alunos observassem o comportamento, imagem e domínio da função trabalhada no software.

O mesmo pode se notar quando foi utilizado slides com os sólidos geométricos, pois os alunos tinham uma visão melhor da figura de três dimensões. Assim, não era necessário realizar um esboço no quadro para a visualização, pois com a ajuda do projetor se teve um tempo maior para o debate das figuras e suas características. A partir desse tempo, houve uma abertura maior para que os alunos tivessem a oportunidade de tirar dúvidas, o que realmente aconteceu, pois em todas as apresentações houve perguntas a respeito do conteúdo.

Outro fato que ocorreu no 2ºA foi a sugestão dos alunos para as construções de gráficos trigonométricos. Sempre que a explicação terminava, um aluno falava para testar uma função que ele havia pensado no momento. Só que para tirar tanto a dúvida dele quanto a dos outros alunos, era utilizado uma tabela com os ângulos notáveis e efetuado as contas no quadro com o auxílio da classe. Assim eles podiam ver pelas contas também o que estava ocorrendo com o gráfico, se ele era transladado para direita ou esquerda, se sua imagem era ampliada ou reduzida, e se tinha mudanças de período.

Algumas considerações

A partir de nossa experiência, foi notado que a utilização da tecnologia foi de grande ajuda para ensinar os alunos, pois essa ação fez com que eles tivessem um espaço maior para participar da aula e tirar suas conclusões. Outro ponto da tecnologia é a possibilidade de voltar as imagens para que os alunos possam revê-la, pois se por acaso fosse totalmente escrito no quadro, teria que ser apagado para dar espaço a um novo esboço e sua nova explicação. Todas as slides e construções foram feitas a partir de nossos computadores, assim os alunos não precisaram levar computadores para a sala de aula.

Chamar o aluno para participar da aula também foi uma experiência que trouxe mais pontos positivos para a aula, pois os professores não são os únicos na sala de aula que sabem sobre a matéria. É importante dar ao aluno o espaço para que ele possa perguntar, indagar e debater com o professor sobre o porque daquilo ocorrer em determinada matéria, isso traz uma nova perspectiva para aula. O que também pode fazer com que os outros possam se soltar mais e começar a fazer perguntas, pois muitos alunos não perguntam devido à timidez ou medo de serem “ridicularizados” pelos outros colegas na sala de aula.

Um receio que surgiu a partir do uso da tecnologia foi a de como os alunos estão tomando nota daquilo que está sendo trabalhado, pois pelo fato de se apresentar o conhecimento a partir do projetor, pode ser que eles acabem não tomando nota ou lendo posteriormente o que acabou de ser passado. Assim, sempre que possível, utilizávamos alguns cantos do quadro para fazer um pequeno rascunho do que estava sendo transmitido, havendo, assim, uma forma dos alunos registrarem por escrito a aula.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Rafael Tavares Juliani, professor orientador do nosso estágio, que nos deu as dicas de como utilizar os softwares e os slides para que os alunos tivessem uma participação maior na sala de aula.

Referências

ALMIRO, J. **Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática**. Escola Secundária de Tondela, 2004. Disponível em:
<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/gti-joao-almiro.pdf>>. Acesso em: 18 jul. 2019.

BITTAR, M. **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática**. Paraná: Universidade Federal do Paraná, 2011. pp.157-171. Disponível em:
<<https://www.redalyc.org/pdf/1550/155019936011.pdf>>. Acesso em: 16 jul. 2019.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia – Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).

JUSTO, J. C. R. **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Canoas/RS: Educação Matemática em Revista – RS, 2012.

TEIXEIRA, S. M.. **A importância do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação na prática pedagógica e na motivação da aprendizagem**. 2012. 46 f. - Curso de Especialista em Mídias na Educação, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

VITAL, M. J. **ENSINO TRADICIONAL DA MATEMÁTICA X RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**. Vitória, 2011. Disponível em:

<<https://www.recantodasletras.com.br/artigos-de-educacao/3183824>>. Acesso em: 16 jul. 2019.

Reflexões acerca dos obstáculos vivenciados durante estágio supervisionado

Lucas Campos de Araújo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
kopier_business@hotmail.com

Janaina Maria de Lima Gonçalves
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
userjanaina@gmail.com

Resumo: O presente artigo tem o intuito de apresentar as situações vivenciadas durante o estágio supervisionado na disciplina de Matemática com alunos do Ensino Médio e explicitar alguns obstáculos epistemológicos e didáticos observados na instituição de ensino, nesta era tecnológica, em que temos a globalização da informação e disseminação de saberes em um nível inimaginável. Para tal faz-se um estudo a respeito das transformações nas metodologias de ensino e também sobre o que os parâmetros curriculares esperam que um aluno do Ensino Médio compreenda em relação aos conteúdos ministrados. Assim são expostos problemas no trabalho com o conceito de função e determinante de matrizes sobre a perspectiva da resolução de problemas, diferenciando o papel do professor de matemática e do pesquisador matemático. Além de explicitar algumas alternativas para transpor os obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino à luz da Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Obstáculos didáticos e epistemológicos; Estágio Supervisionado; Resolução de Problemas.

1 Introdução

No decorrer da história o homem foi capaz de se adaptar às mudanças climáticas, evoluindo progressivamente em aspectos biológicos e psicológicos, além de criar instrumentos em busca de facilitar o seu cotidiano e necessidades. Pode-se citar a criação e utilização da linguagem, a qual nos primórdios da sociedade começou a se desenvolver com os primeiros murmúros entre os indivíduos. Este surgimento ocorreu principalmente pela necessidade da comunicação verbal nos grupos existentes e, conseqüentemente, possibilitou a produção das mais diversas formas de escrita. Segundo Leontiev (1991), a linguagem possibilita ao homem ter consciência das coisas, o que é um dos principais fatores que nos diferencia dos animais.

Assim o homem contemporâneo, a partir da linguagem é um ser capaz de planejar, desenvolver, criar e conjecturar ideias, alterando o seu meio, o que conseqüentemente modifica o seu convívio social. Nessa perspectiva evolutiva, tem-se na Educação, especificamente no Brasil, um ciclo transitivo sobre as formas de ensino, ou seja, uma constante mudança nas metodologias, conteúdos e concepções adotadas pelos profissionais. Tomando como exemplo as transformações no decorrer do último século, podem-se citar algumas metodologias de ensino que “marcaram”

a Educação como a Escola Tradicional, a Escola Nova, o Movimento da Matemática Moderna, dentre outras.

Em suma, a metodologia da Escola Tradicional, proposta por Johann Friedrich Herbart (1776-1841), concebia o professor como detentor dos saberes e um modelo a ser seguido pelos alunos/crianças, para que conseguissem enaltecer a parte essencial de sua natureza e aprisionar a parte corrompida. Além disso, não se valorizava os pré-conhecimentos dos alunos nem suas opiniões e conjecturas dentro da sala de aula. Em contrapartida a essa temos a metodologia da Escola Nova, proposta por John Dewey (1859-1952), concebia o professor como um ser mediador, cuja funcionalidade era guiar o aluno a apropriação dos conhecimentos a partir da valorização dos seus conhecimentos prévios e da experimentação, podendo ser considerada um método pseudocientífico. Já no movimento da Matemática moderna, conhecido também como o movimento de renovação do ensino da Matemática, que ocorreria no Brasil por volta dos anos 60, por grandes influências internacionais, inicialmente tinha por principal objetivo a preocupação com o conteúdo que se ensinava, mas em diversos projetos curriculares da época envolvendo esta metodologia tinha-se a preocupação com o método de ensino, objetivos como o da participação ativa do aluno para a construção do conhecimento, o estímulo à descoberta e à resolução de problemas, a ideia de que aprender Matemática é “fazer matemática”, ou seja, tanto o professor quanto o aluno deveriam ter um papel ativo em sala de aula.

No entanto, no atual cenário da educação, apesar da grande diversidade de metodologias de ensino/aprendizagem, temos professores “[...] inseguros diante das novas ações” (PACHECO; PACHECO, 2013, p.44) que, por vezes, preferem não sair da zona de conforto deixando, assim, de lado a responsabilidade com a capacitação teórica e prática, o que pode vir a impossibilitar que os discentes se apropriem adequadamente de conhecimentos. Visto que é necessária a capacidade de explicar e relacionar os conteúdos de modo diferenciado, até mesmo para indivíduos de mesmo convívio social. De fato, isto se evidencia, pois cada indivíduo desenvolve sua consciência e saberes de acordo com os meios em que convive e as influências que agem sobre o mesmo, no caso do professor sua formação e seu ambiente de trabalho e convívio social, o que corrobora com o que traz Leontiev (1978) “a criança, no momento do nascimento, não passa de um candidato à humanidade, mas não a pode alcançar no isolamento: deve aprender a ser um homem na relação com os outros homens”.

Atualmente, com os avanços tecnológicos, tem-se a globalização da informação das diversas culturas e saberes sociais, o que acarreta em algumas características aos indivíduos conviventes a este meio. Pode-se notar tal influência nas instituições de ensino, as quais atendem diferentes públicos sociais, culturais, étnicos e morais, que dentro de suas condições oportunizam a apropriação do conhecimento e conseqüentemente o desenvolvimento cognitivo das novas gerações. Entretanto o trabalho do professor nem sempre possibilita que os discentes consigam se beneficiar deste aspecto, seja por não se adaptarem a forma de ensino ou por obstáculos decorrentes de experiências anteriores.

Logo, não é lógico pensar que indivíduos de meios diferentes consigam atingir os mesmos resultados utilizando um método de aprendizado modelo, ou seja, único e generalizado para a

sociedade. Porém, na contemporaneidade, ainda se tem exatamente este modelo de ensino, que visa utilizar um único modo de ensinar, muitas vezes impossibilitando uma associação com a realidade e um ensino significativo que vá além do proposto nos livros didáticos. Schoenfeld (1996) aponta que “na verdade, fazer sentido, deveria ser a principal atividade da escola”.

Tomando como exemplo a matemática, temos em um contexto geral um sentimento de desprezo por parte dos estudantes, os quais por muitas vezes não conseguem compreendê-la ou relacioná-la a outras situações, acabando por estudá-la apenas para ser aprovado. Assim, perdem uma grande oportunidade de aprofundamento científico e também cultural, pois conforme afirma Polyá (1997):

Esta é a grande oportunidade da matemática: matemática é o único assunto na escola secundária em que o professor pode propor e os estudantes podem resolver problemas em um nível científico. Isso acontece porque a matemática é muito mais simples do que as outras ciências (POLYÁ, 1997, p.2).

Sobre a perspectiva de diversidade de indivíduos e metodologias no ensino, surgem os obstáculos epistemológicos e os obstáculos didáticos. Segundo Bachelard (1996) o obstáculo epistemológico é constituído de um conhecimento que faz resistência a uma nova apropriação intelectual para o aluno, já os obstáculos didáticos dizem respeito a conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual do educador e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar.

Brousseau (1983) considera que os conhecimentos construídos pelos alunos geralmente são locais e podem eventualmente construir pontes de dificuldades ou de erros na ocasião da aprendizagem de novos conhecimentos. Deste modo, é importante analisarmos os obstáculos que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem.

Em virtude desses obstáculos no ensino que impossibilitam a aprendizagem, torna-se necessária uma mudança que ultrapasse uma preocupação conteudista ou centrada nas práticas pedagógicas e metodológicas. Segundo Becker (1993) é necessário uma mudança epistemológica, visto que atualmente nas salas de aula os professores dizem adotar uma posição ora empirista e ora apriorista, ou seja, uma valorizando o prática/experiência e outra a raciocínio. Isto decorre da formação destes professores, a qual se baseava no instrucionalismo, ou seja, na transmissão dos conteúdos como se fosse a única forma de abstraí-los, desconsiderando assim a criatividade e capacidade dos discentes.

A mudança pode começar a partir de um olhar reflexivo sobre a prática pedagógica, no intuito de encontrar caminhos ainda desnivelados que possam ser corrigidos e aprimorados por meio da reformulação do plano de ensino. Visto que o plano de ensino do educador é um instrumento de grande importância no processo de ensino/aprendizagem, o qual não deve se desenvolver em um processo único, mas sim em uma integração de processos que possibilite o entendimento de todos os discentes.

É necessário que o educador matemático saiba diferenciar o seu trabalho da atividade de pesquisador matemático, pois enquanto o trabalho desenvolvido pelo pesquisador se volta a desenvolver demonstrações, provar ou falsear teoremas, criar conceitos por meio de avaliação e

aprovação de uma comunidade científica, levando assim ideias simples a complexidade e consequentemente generalizações. O trabalho do educador se volta a estudar esta generalização no intuito de torná-la o mais compreensível para desenvolvê-la em seu plano de aula, assim possibilitando o acesso desse conhecimento aos alunos partindo de exemplos e contextualizações básicas até as complexas. Para que assim os alunos vejam o conteúdo e o estudo como um processo de construção e o treinamento como algo necessário para a aprendizagem.

[...] é necessário que o/a aluno/a utilize várias vezes o mesmo tipo de pensamento e conhecimento matemático, não para memorizá-lo, mas, sim, para abstraí-lo, estendê-lo, ou generalizá-lo, como também, para aumentar sua autoconfiança e sua familiarização com o mesmo. O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o/a aluno/a percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção. Além disso, o jogo de treinamento pode ser utilizado para verificar se o/a aluno/a construiu ou não determinado conhecimento, servindo como um “termômetro” que medirá o real entendimento que o/a aluno/a obteve. Entretanto, com a participação do/a aluno/a nos jogos e sua necessária participação ativa, o/a professor/a poderá perceber as suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las (LARA apud STRAPASON, 2011, p. 38).

Esta reflexão possibilitaria o cumprimento das expectativas previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para Matemática, os quais visam que no segundo ciclo do ensino fundamental seja propiciado aos alunos situações-problemas que lhes permitam ir além do conjunto dos números naturais, por meio da compreensão de alguns conceitos como o da divisão e o da multiplicação, aproximando-se assim de uma noção inicial de número racional para que posteriormente sejam feitas generalizações.

A elaboração de um plano de aula de forma rigorosa e a constante análise dos resultados provenientes da metodologia adotada, por parte do professor, possibilitaria aos estudantes uma compreensão dos conceitos matemáticos de uma forma menos árdua do que ocorre rotineiramente nas salas de aula, em que por mais que o professor tente expressar os conceitos de outras maneiras estes não são compreendidos pelos estudantes, assim sua formação fica em desacordo com o previsto nos PCN.

Outro aspecto relevante no processo de ensino/aprendizagem, especificamente na Matemática, é a relação aluno professor, visto que o caráter estático do ensino esta se tornando ultrapassado, objetivando uma dinamicidade na construção dos conceitos dentro da sala de aula que suscite em uma maior interação entre professor e aluno.

Os obstáculos epistemológicos e didáticos, também podem ser vistos em um grande problema na educação, que é o processo cognitivo de formação de conceitos. No que diz respeito à Matemática, esta problemática encontra-se nas salas de aula, visto que o método de ensino Tradicional valoriza a exposição dos conceitos, construídos a partir de décadas de estudo e pesquisas. No entanto a exposição destes para os alunos, no intuito de introduzir um conteúdo, acaba na maioria das vezes tendo um caráter ineficaz no processo de ensino e aprendizagem, pois nem mesmo um cientista parte da generalização para uma situação específica, mas traça justamente o caminho contrário, ou seja, parte do específico para a generalização.

Pretende-se neste breve trabalho relatar alguns obstáculos epistemológicos e didáticos no ensino dos conceitos de função e determinante de matrizes, vivenciados durante o estágio supervisionado em duas turmas do Ensino Médio, em decorrência de alguns fatores como o abuso de linguagem utilizado na apropriação de conhecimentos preliminares, a metodologia de ensino, a falta de planejamento, entre outros, destacando algumas alternativas para transpor tais obstáculos como o uso de metodologias de ensino que se contrapõem ao ensino tradicional, como a Resolução de Problemas.

O estágio supervisionado ocorreu em duas turmas do Ensino Médio, primeiro e segundo ano, em que propiciamos aos discentes atividades no intuito de que se apropriassem dos conceitos de função e determinante respectivamente. Antes do início do estágio fora necessário a realização de observações para a escolha das turmas e a ambientação na instituição de ensino. Nessas observações, concluímos que o Método Tradicional, proposto por Johann Friedrich Herbart (1776-1841), era a metodologia utilizada na maioria das aulas observadas, ou seja, exposição de conteúdos na lousa e realização de exercícios até fixar o conceito. Concluímos ainda que, as aulas consistiam em repetição de passos apresentados na lousa e utilização de algoritmos prontos, sem sua dedução, apresentando apenas alguns apontamentos sugeridos no livro didático.

Em razão disto, discutimos e decidimos pela utilização de uma metodologia de ensino diferente da tradicional e que possibilitasse outra vivência para os discentes, no caso a Resolução de Problemas. No entanto, por considerar imprudente uma mudança total na metodologia, dado que os alunos já estavam acostumados ao ensino tradicional, optamos por manter alguns aspectos como a exposição de definições e mecanismos repetitivos, mas acrescentamos atividades de carácter introdutório para trabalhar com a Resolução de Problemas e consequentemente apresentar os conceitos e origem das “fórmulas” aos discentes.

Ao iniciarmos a regência, a indagação inicial permeava acerca das mudanças que poderíamos realizar no ambiente de aprendizagem de modo que o conhecimento fosse repassado de forma qualitativa e quantitativa. Para isso, optamos por introduzir os conceitos fazendo-se o uso da Resolução de Problemas à luz das etapas que Allevato e Onuchic (2009) propõem:

1. Preparação do problema – Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento; 2. Leitura individual – Entregar o problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura; 3. Leitura em conjunto – Solicitar nova leitura do problema, agora em pequenos grupos de alunos; 4. Resolução do problema – De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo; 5. Observar e incentivar – O professor não é mais transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de idéias entre eles; 6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos registram, na lousa, suas resoluções; 7. Plenária – Todos os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas; 8. Busca do consenso – Sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto; 9. Formalização do conteúdo – Neste momento o professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo matemático, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos, princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

2 Reflexões acerca das mudanças que a Resolução de Problemas proporciona

Nas primeiras aulas, trouxemos problemas considerados desafiadores, que exigiam a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para resolver, assim como Dante (1998) propõe. Criando assim um ambiente desafiador e motivador que de acordo com Machado (2006, p. 30) é o momento em que a Resolução de Problemas começa a se alicerçar como uma metodologia de ensino, uma maneira de ensinar Matemática, e o problema, um elemento ativador de construção de conhecimento.

Percebeu-se que o ensino do conceito de determinante associado a uma matriz, por muitas vezes, é uma tarefa árdua para o professor, visto que para a compreensão e utilização deste conceito é necessário que o aluno domine as operações aritméticas básicas tanto com os números, quanto com as próprias matrizes. Entretanto, é de conhecimento comum, a dificuldade advinda dos obstáculos surgidos no passado dos alunos em relação a essas operações básicas. Assim tem-se que este conceito engloba mais do que simplesmente um processo mecânico ou uma fórmula resolutiva, mas toda uma cadeia de conhecimentos prévios.

Da mesma forma, notamos que o ensino do conceito de função também exige um grande aparato de conhecimentos dos discentes, dado que este envolve conjuntos, operações aritméticas, operações algébricas, análise de dados, entre outros conceitos.

Em virtude destas complexidades, têm-se nas salas de aula alguns obstáculos epistemológicos evidenciados frequentemente nas aulas de matemática. Logo, valer-se de formas instigadoras aos discentes como a abordagem de um problema sob a luz da Resolução de Problemas pode propiciar a superação de alguns obstáculos no ensino. Por conta disto, para introduzirmos as aulas escolhemos algumas situações-problema.

No que diz respeito ao conceito de determinante, optamos inicialmente em apresentar a origem do conceito, ou seja, relacioná-lo com a solução de um sistema linear, visto que a professora regente da turma utilizava-se de sistemas diversas vezes durante as aulas observadas. Para tal propomos aos discentes um sistema de ordem 2, conforme segue:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

e os indagamos a respeito de sua solução. No entanto, não obtivemos respostas conclusivas, talvez por a linguagem apresentada ser muito abstrata aos olhos dos discentes. Então optamos por expor alguns exemplos numéricos por acreditarmos que a dificuldade se encontrava no aspecto genérico da situação.

Assim, posteriormente conseguimos denotar que $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1$ e ressaltamos que para a existência de único valor para y que satisfaça a igualdade é necessário que $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ seja não nulo. Existindo um único valor de y , existirá um único valor x e o sistema terá solução. Assim fora possível expor que a expressão $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ representa o determinante da matriz de ordem 2, pois conforme o seu valor sabemos de antemão se o sistema é ou não determinado. No entanto, pelo fato dos discentes não estarem acostumados com a formalização apresentada e, talvez, com a linguagem utilizada, notamos que alguns ficaram um pouco confusos e em vista disso, realizamos a apresentação do artifício prático para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 2, dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$$

Nesse momento indagamos aos discentes a respeito do sinal negativo que surgia no artifício exposto e alguns alunos expuseram que isso talvez decorresse do fato de estarmos fazendo o primeiro processo “invertido”, o que por se tratar de um primeiro contato foi aceitável e coerente. Então para elucidar essa questão denotamos que o sinal negativo, que aparece nesse artifício prático, esta relacionado com o conceito de permutação, que intuitivamente é a troca de posição de objetos, no caso o índice posicional dos termos da matriz, e também exploramos o sinal da permutação denotando que é positivo para um número de trocas pares e negativo para trocas ímpares.

Posteriormente, propomos algumas situações-problemas para avaliar a compreensão dos discentes em relação ao conceito exposto, esses problemas apresentavam contextualizações e exigiam o uso de algumas ferramentas matemáticas que, em relação a nossa perspectiva, os discentes já possuíam, conforme o exemplo a seguir, envolvendo o conceito de função e determinante:

Exemplo 1. Foi realizada uma pesquisa com 400 crianças de 3 a 12 anos de idade em três escolas de um município. Em relação a esse grupo de crianças conclui-se que, em média, a massa p , em quilogramas, poderia ser calculada em função da idade x , em anos, pela seguinte função: $p(x) = \det(P) = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

De acordo com as informações, determine:

- A massa média de uma criança de 6 anos.
- A idade provável de duas crianças com 28kg e 20kg.

No entanto, durante a realização das atividades, observamos grandes dificuldades por parte dos discentes em interpretação de texto e no uso de seus conhecimentos prévios como com operações básicas, principalmente com frações, o conceito de função, entre outros, o que acabou de certo modo desnortando o foco do trabalho com determinantes e suas propriedades. Visto que, tivemos que retomar tanto as operações básicas elementares como também as operações com matrizes, e esta última havia sido trabalhada recentemente pela professora regente da turma.

Contudo, persistimos na realização das atividades, mas tivemos que adaptar os encaminhamentos de modo a possibilitar um maior auxílio na interpretação das situações-problema e no que se refere aos obstáculos com operações elementares. E com isso, percebemos que alguns discentes começaram a expor maior interesse na realização das atividades e passaram a participar mais ativamente nas aulas. Vale ressaltar que, infelizmente, alguns estudantes não demonstraram esse mesmo interesse nas atividades e por algumas vezes acabavam causando tumultos desnecessários e atrapalhando o desenvolvimento das atividades, mas nesse ponto tivemos o apoio da coordenação pedagógica na orientação desses alunos.

Já para introduzirmos o conceito de função, utilizamos uma situação do cotidiano descrita a seguir:

Exemplo 2. Todas as manhãs, Luciana compra pães doces na padaria, sendo que cada pão doce custa R\$0,90. Como podemos relacionar o número de pães comprados em relação ao preço?

Ao fazermos esse questionamento aos discentes tivemos poucas respostas, dado que não estão acostumados a uma aula interativa, então decidimos partir de questionamentos mais simples como “Quanto custariam 3 pães doces?” ou “Se Luciana tivesse R\$5,60 quantos pães doces poderia comprar?” e a partir disso conseguimos uma maior participação dos alunos e estabelecemos uma tabela, relacionando o número de pães com o valor a ser pago, com a qual denotamos que o preço é função da quantidade de pães, ou seja, cada número que define a quantidade de pães corresponde a um único número, que define o preço total.

Num primeiro momento, propomos algumas situações-problema que envolviam o conceito exposto de modo indireto e que os discentes poderiam resolver com conhecimentos anteriores ou do mesmo modo apresentado. Neste momento, notamos novamente grande dificuldade em interpretação da situação-problema, então mais uma vez passamos a auxiliar os discentes para propiciar uma melhor compreensão das situações e do conceito exposto.

Além disso, após a introdução dos conceitos, propusemos exercícios de reconhecimento e exercícios de algoritmos. De acordo com Dante (1998), os exercícios de reconhecimento requer do aluno o reconhecimento ou a identificação de um conceito e os exercícios de algoritmos servem para o aluno treinar o algoritmo ou reforçar o conhecimento aprendido.

No que diz respeito aos exercícios sobre determinante, observamos nas primeiras aulas a grande dificuldade dos discentes na multiplicação e para tentar transpor este obstáculo ten-

tamos nos utilizar da ideia de somas sucessivas denotando para os discentes que ao realizar uma multiplicação do tipo $a \times b$, precisa somar o número b em a vezes, além disso retomamos algumas operações com frações e números decimais. Já tratando-se do exercícios sobre função, observamos algumas dificuldades com relação aos conteúdos envolvendo conjuntos numéricos e, principalmente, na interpretação da “lei” que relaciona dois conjuntos. No entanto, por essas ações não terem atingido um grande efeito tomamos convicção que apenas a mudança de metodologia não bastaria para realizar uma mudança significativa naquele momento. Por conta disto, nos propusemos a mudar a avaliação dos alunos de modo que contemplássemos o aprendizado de cada um sem a pressão de testes individuais.

Em um segundo momento, voltamos para a avaliação da aprendizagem do aluno que de acordo com Santos (2002), tem por objetivo contribuir para a aprendizagem através da autorregulação dos alunos. Para tal, adotamos estratégias como questionamento oral, engajamento, negociação dos critérios de avaliação e de recursos alternativos e diversificados de avaliação. Dessa forma, nos comprometemos em não aplicar uma prova individual, e sim entregar um problema de aplicação definido por Dante (1998) como situações-problema, ao fim de cada aula para que os alunos trouxessem resolvidos na aula seguinte, sendo que sempre os auxiliamos em parte das resolução ainda em aula.

No entanto, o *feedback* por parte dos alunos era insatisfatório, uma vez que o retorno foi baixíssimo. Muitos entregaram os problemas em branco, e os poucos que entregaram os problemas resolvidos, não apresentaram os passos da resolução ou raciocínio para obter a solução. Porém, continuamos esta avaliação, para que pudéssemos entender as dificuldades dos alunos e analisar quais os procedimentos metodológicos que poderíamos mudar, assim como Laburú, Silva e Vidotto (2005) propõe:

Nesse caso, é indispensável que a avaliação, quando empregada continuamente, cumulativamente e como parte da metodologia de ensino, contemple tanto aspectos quantitativos como qualitativos e, assim, vise a um melhor acompanhamento do estudante e não apenas uma simples verificação instantânea em alguns poucos momentos do aprendizado. Para isso, é interessante que elementos avaliativos não-ortodoxos sejam utilizados e façam parte da aprendizagem, a fim de se verificar a qualidade do procedimento de ensino-aprendizagem. Desse poderão ser reveladas carências e inquietações dos alunos, que possam reorientar constantemente o trabalho do professor para a superação das suas dificuldades. (LABURU; SILVA; VIDOTTO, 2005).

Contudo, por conta de termos um tempo limitado, 18 horas de regência ao todo, não fora possível obter o interesse e participação de todos os discentes nas atividades, mas obtivemos alguns resultados positivos e observamos que alguns discentes se mostraram mais interessados nas aulas com questionamentos e atividades em conjunto do que no ensino tradicional. Além disso, temos consciência de que por se tratar de uma primeira abordagem norteada pela Resolução de Problemas pecamos em alguns aspectos relacionados as nossas ações como docente, os quais advêm do próprio ensino Tradicional com o qual estamos acostumados.

Vale ressaltar que até mesmo os alunos que apresentaram desinteresse nas primeiras aulas ao final, mesmo com cerca persistência, começaram a participar ativamente da aula levantando questionamentos e tentando superar seus próprios obstáculos principalmente com relação as

operações elementares.

Ainda, que o docente deve tomar consciência das ferramentas necessárias para desenvolver sua aula de modo que alcance um objetivo desejado, ou seja, ter a compreensão da complexidade envolvida neste processo. E ainda que, no desenvolvimento das atividades perceba a necessidade de se ter clareza do conceito a ser abordado, visto que se o próprio docente tiver dificuldades em compreender e ensinar o conteúdo poderá gerar obstáculos na aprendizagem os quais podem perdurar por toda a vida do estudante.

Conclusões

O desenvolvimento destas atividades possibilitou observar que a resolução de problemas é de fato um meio promissor para se ensinar matemática, visto que a mesma atende em parte o que é proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros; o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1997, p. 43).

Ainda, estamos certos e conscientes de que a implementação de novas metodologias não é algo simples, pois essas são entendidas de formas diferentes de acordo com o ponto de vista de cada educador. Além disso, atualmente tem-se uma desvalorização do conhecimento científico principalmente envolvendo atividades laboriosas, logo cabe ao educador o estabelecimento de tarefas que direcionem as atividades desenvolvidas pelos discentes para atingir seus objetivos e propiciar aos alunos momentos de aprendizagem significativa.

Contudo, acreditamos que é possível a utilização de metodologias diferenciadas no ensino, como a Resolução de Problemas, mas não necessariamente de modo integral nas aulas, visto que há a necessidade de momentos mais tradicionais que envolvam basicamente a repetição e não a construção de novos conhecimentos. Além disso, deve-se levar em consideração que o tempo destinado para se elaborar uma atividade baseada em resolução de problemas é incompatível com o tempo que os atuais professores possuem para elaborar suas atividades, mas isto não pode ser tomado como uma justificativa plausível para não se ter uma atitude de mudança com relação ao ensino, seja por intermédio próprio ou do Estado.

O ensino dos conceitos de função e matrizes sob a perspectiva da Resolução de Problemas pode ser uma alternativa para despertar o interesse dos alunos potencializando a aprendizagem. No entanto cabe ao educador um embasamento e uma preparação prévia definindo os objetivos que almeja atingir. Ressalta-se que o professor deve se utilizar de atividades interativas, por

proporcionar interação e evidenciar momentos de troca de conhecimento entre os alunos. Ainda, a adoção de uma nova metodologia, como a Resolução de Problemas, deve oportunizar tanto momentos de construção de novos conhecimentos, como também, momentos de retomada e reforço das habilidades já trabalhadas. Assim, concluímos que a Resolução de Problemas possui um forte viés para tornar o ensino significativo de acordo com cada situação e ambiente de ensino.

Ademais, acreditamos que os obstáculos no ensino, apesar de sempre existirem, podem ser superados a partir da mediação do professor, o qual pode se valer de metodologias diferenciadas de maneira a instigar a curiosidade dos alunos para com o conteúdo, bem como buscar identificar em seus alunos suas dificuldades e obstáculos epistemológicos e propor atividades que possibilitem essa superação para promover um real entendimento da Matemática.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. **Formação de Professores ?** Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSE, L. (Org). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, 169-187.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.
- BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1993.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques**. Grenoble, Recherches en didactique des mathématiques. v. 4, n. 12, p. 165-198. 1983.
- DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.
- LABURU, C. E.; SILVA, D.; VIDOTTO, L. C. **Avaliação tradicional e alternativa no ensino: um estudo comparativo**. Semina: Ciências Sociais e Humanas. Londrina, p. 27-42. set. 2005.
- LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.
- LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Trad. Manuel D. Duarte. Lisboa, Livros Horizonte, 1978.
- MACHADO, E. S. **Modelagem matemática e resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Faculdade de Física - Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática. PUCRS, 2006.

PACHECO, J; PACHECO, M. F. A Escola da Ponte sob múltiplos olhares: palavras de educadores, alunos e pais. Porto Alegre: Penso, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência, 1995. 196 p.

SANTOS, L. **Auto-avaliação regulada**: porquê, o quê e como? Lisboa: ME, Departamento da Educação Básica.

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?** In: Abrantes, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.(Eds.), Investigar para aprender matemática. Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996, p. 61-72. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM). Disponível em:<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf>>. Acesso em: 15 Set. 2019.

STRAPASON, L. P. R. **O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio**. Dissertação - Centro Universitário Franciscano (UNIFRA). Santa Maria (RS), 2011.

Otimização Convexa

Matheus Alexandre Alves Anzolin
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
matheusalves2107@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: O presente trabalho versa sobre Otimização Convexa, onde o objeto de estudo são funções convexas, funções estas que possuem aprazíveis propriedades para otimização. Discutimos um pouco sobre um Problema de Programação Linear e o fato deste possuir uma intrínseca relação com a classe de funções convexas. Por fim, mostramos que a convexidade globaliza resultados de otimização.

Palavras-chave: Convexidade; Otimização; Programação Linear.

1 Introdução

Como o objeto de estudo da Otimização Convexa é a classe de funções convexas podemos dizer que os Problemas de Otimização Convexa possuem soluções confiáveis devido as propriedades destas funções serem ricas e bem desenvolvidas, sem contar que aparecem em diversos contextos, como nos é apresentado em BOYD,2004.

Sabemos que problemas convexos, quando viáveis, podem ser resolvidos de forma eficiente. Assim, um ponto importante na área de Otimização Convexa é a modelagem dos problemas, já que sua solução é obtida sem muito esforço.

Neste trabalho é definido o que são os conjuntos convexos e funções convexas. Ainda, mostramos a globalização que é permitida na Otimização Convexa como em RIBEIRO & KARAS, 2013.

Definição 1. Considere uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$. Caso $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \Omega$, x^* é dito minimizador global de f em Ω .

A presente definição é análoga para o caso de maximizadores. Note ainda que a diferença entre minimizador local e global é apenas a vizinhança. Para o primeiro, existe uma vizinhança em que ele é minimizador, logo é local, para o último não importa a vizinhança que tem, ele sempre será um minimizador, logo global.

A seguir a definição de um conjunto convexo. Note que na literatura, RIBEIRO & KARAS, 2013, os conjuntos convexos são chamados de domínios naturais das funções convexas, o que os torna em demasia importantes para o estudo da otimização convexa.

Definição 2. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in S$, o segmento

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty; t \in [0, 1]\} \subset S.$$

Na Figura 1 um exemplo de conjunto convexo e um de não convexo, dito côncavo.

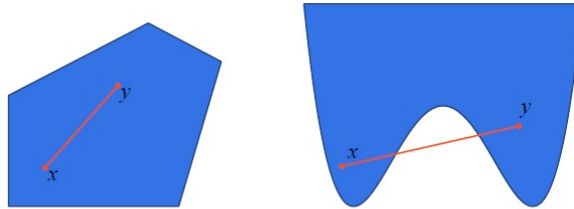


Figura 1: Conjunto convexo e não convexo respectivamente.

O resultado seguinte servirá de alicerce para Proposição 4, a demonstração deste pode ser encontrada em RIBEIRO & KARAS, 2013 e ANZOLIN & CONEJO, 2018.

Lema 3. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ com $u \neq v$. Se $\|u\| = \|v\| = r$, então $\|(1 - t)u + tv\| < r$, para todo $t \in (0, 1)$.*

O próximo resultado diz respeito especificamente das propriedades de um conjunto convexo. Se tivermos um conjunto convexo fechado e um ponto qualquer do espaço, podemos garantir a existência de um ponto no conjunto convexo mais próximo possível do ponto no espaço. O ponto em questão, que está no convexo é denominado de projeção do ponto no espaço no conjunto.

Proposição 4. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe um único $p \in S$ tal que $\|z - p\|_2 \leq \|z - x\|_2$ para todo $x \in S$. Denotaremos $p = \text{proj}_z(S)$*

Prova. Seja $p, \bar{p} \in S$ tal que $p \neq \bar{p}$, então por hipótese temos que

$$\|z - p\| \leq \|z - x\| \quad (1)$$

$$\|z - \bar{p}\| \leq \|z - x\| \quad (2)$$

para todo $x \in S$. Então seja em (1) e (2) respectivamente, $x = \bar{p}$ e $x = p$ obtendo

$$\|z - \bar{p}\| \leq \|z - p\| \text{ e } \|z - p\| \leq \|z - \bar{p}\|.$$

Então,

$$\|z - \bar{p}\| = \|z - p\|. \quad (3)$$

Note que $x = \frac{1}{2}(p + \bar{p})$ está no convexo. Além disso, pelo Lema 3, com $r = \|z - \bar{p}\| = \|z - p\|$ e $t = \frac{1}{2}$, temos então que

$$\|(1 - t)(z - p) + t(z - \bar{p})\| < r$$

$$\|z - x\| = \|(1 - t)(z - p) + t(z - \bar{p})\|.$$

Mas de (1) e (2) temos que,

$$\|z - x\| \leq r$$

contradizendo a hipótese. Logo $p = \bar{p}$. □

Por conseguinte alguns exemplos de conjuntos convexos, tomados como lemas.

Lema 5. *Um conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ solução de um Sistema Linear é um conjunto Convexo.*

Prova. Sejam $\alpha, \beta \in S$. Então $\forall t \in [0, 1]$ temos que

$$\begin{aligned} A(t\alpha + (1 - t)\beta) &= At\alpha + A(1 - t)\beta \\ &= tA\alpha + (1 - t)A\beta \\ &= tb + (1 - t)b \\ &= tb + b - tb = b. \end{aligned}$$

Note que se tivermos $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ temos que o que se chama de Poliedro, enquanto S é chamado de conjunto Afim. □

O próximo exemplo tem uma característica importante, pois mostra que a convexidade é mantida quando está sob uma transformação linear, ou seja, a imagem de um conjunto convexo é convexa também.

Lema 6. *Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear, tal que D é um conjunto convexo, então $f(D)$ é convexo.*

Prova. Sejam $x, y \in D$ então $\forall t \in [0, 1]$, $xt + (1 - t)y \in D$ pela convexidade do conjunto D. Aplicando f no segmento dentro de D, temos que: $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(xt + (1 - t)y) &= f(xt) + f(y(1 - t)) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y) \end{aligned}$$

Pois f é uma transformação linear. Como $f(x), f(y) \in f(D)$ temos que $f(D)$ é convexo. □

A próxima definição diz respeito a classe de funções que possuem como domínios naturais os conjuntos convexos, logicamente as funções convexas.

Definição 7. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que a função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em S quando,*

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in S$ e $t \in [0, 1]$.



Figura 2: Função convexa.

Note que a imagem de um segmento ser menor ou igual ao segmento que liga suas imagens, significa exatamente como na figura, que haverá um segmento sobre o gráfico da função, este ligando as imagens. E ainda, quando uma função se diz não convexa é denominada Côncava.

Note que o conceito de função convexa é bem simples, contudo provar que uma determinada função é convexa pode dar trabalho, veja a seguir um exemplo que retrata muito bem esta situação.

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

A função f é claramente uma função convexa, uma quadrática com parâmetros $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

Por definição de convexidade de uma função temos que,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, 1].$$

Temos então

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ f(x - tx + ty) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ f(x + t(y-x)) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ (x + t(y-x))^2 &\leq (1-t)x^2 + ty^2 = x^2 + t(y^2 - x^2) \\ x^2 + 2tx(y-x) + t^2(y-x)^2 &\leq x^2 + t(y+x)(y-x) \\ 2tx + t^2(y-x) &\leq t(y+x) \\ 2x + ty - ty &\leq y + x \\ x + t(y-x) &\leq y + x \\ t(y-x) &\leq (y-x) \\ t &\leq 1; t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Portanto a função $f(x) = x^2$ é uma função convexa.

Agora, já definidos o que são conjuntos convexos e funções convexas, faz sentido falar de

um Problema de Otimização Convexa, que é representado usualmente como

$$\begin{aligned} &\text{Otimizar} && f_0(x) \\ &\text{Sujeito a} && f_i(x) \leq 0; \quad i = 1, \dots, m. \\ &&& h_j(x) = 0; \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

tal que $\forall t \in [0, 1]$ $f_i(tx + (1-t)y) \leq tf_i(x) + (1-t)f_i(y)$ e $h_i(tx + (1-t)y) \leq th_i(x) + (1-t)h_i(y)$

Quando um problema de Otimização Convexa possuir funções além de convexas lineares, tanto no conjunto restrição como como função objetivo, dizemos que este problema é um P.P.L. - Problema de Programação Linear. Um P.P.L. é comumente representado em sua forma matricial, da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} &\text{Otimizar} && c^T x + d \\ &\text{Sujeito a} && Gx \leq h \\ &&& Ax = b. \end{aligned}$$

em que $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$

Em última análise, um PPL é um caso especial de um Problema de Otimização Convexa, por possuir funções lineares, que são convexas, em suas restrições e objetivos.

2 Globalidade de Soluções

Esta seção é exclusivamente dedicada a um resultado inicial do contexto da Otimização Convexa, mas de grande valia para a mesma. Com este resultado podemos garantir a existência de uma solução global por meio de uma solução local. Vale ressaltar que tal resultado só vale no contexto de funções convexas em domínios convexos.

Teorema 8. *Globalidade de Soluções Locais.* *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x^* \in S$ é um ponto de mínimo local de f , então x^* é um ponto de mínimo global de f .*

Prova. Seja $\delta > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*, \delta) \cap S$. Dado $y \in S; y \notin B$, tome $0 < t < \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$. Assim, o ponto

$$\bar{x} = (1-t)x^* + ty \tag{4}$$

é propício para que $\|\bar{x} - x^*\| = \|y - x^*\| < \delta$ seja satisfeita, pois supondo $t = \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$ temos de (4) que,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x^* \left(1 - \frac{\delta}{\|y - x^*\|}\right) + \frac{\delta}{\|y - x^*\|} y \\ &= x^* - \frac{\delta x^*}{\|y - x^*\|} + \frac{\delta y}{\|y - x^*\|} = x^* + \frac{\delta}{\|y - x^*\|} (y - x^*) \\ &\Rightarrow \bar{x} = x^* \frac{\delta}{\|y - x^*\|} (y - x^*). \end{aligned}$$

Aplicando Norma em ambos os lados da equação temos que, $\|\bar{x} - x^*\| = \delta \frac{\|y - x^*\|}{\|y - x^*\|} \Rightarrow \delta = \|y - x^*\|$, ou seja $\bar{x}$ está na fronteira de B . Portanto $\bar{x} \in B(x^*, \delta) \cap S$ com $0 < t < \frac{\delta}{\|y - x^*\|}$. Assim temos que,

$$f(x^*) \leq f(\bar{x}),$$

usando o fato de que f é convexa temos ainda que,

$$f(x^*) \leq f(\bar{x}) \leq (1-t)f(x^*) + tf(y).$$

$$\Rightarrow f(x^*) \leq tf(y).$$

Portanto $f(x^*) \leq f(y) \forall x \in B \cap S$ e $y \notin B$ e $y \in S$. □

Note que o resultado é análogo para maximizadores se a função em questão for Côncava

Conclusões

Neste trabalho foram definidos Problema de Otimização Convexa, bem como o seu caso especial, um Problema de Programação Linear. Ambos buscam otimizar uma função objetivo convexa, no primeiro não necessariamente linear, no segundo uma função linear.

Provamos, dentro das hipóteses do Teorema 8, que encontrado uma solução local, então esta solução é global. Esta característica de globalização é importante no contexto da otimização, pois os algoritmos otimizadores satisfazem-se com os mínimos locais.

Referências

RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. Otimização Contínua – Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 300 p.

BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. Convex Optimization. United Kingdom, Cambridge University, 2004.

ANZOLIN, M. A. A.; CONEJO, P.D.(2018). Introdução às Funções e Domínios Convexos.

Anais XXXII Semana Acadêmica de matemática, Cascavel, Paraná, Brasil. 183-193 P.

Disponível em <http://www.dmat-unioeste.mat.br/files/Anais>.

O Teorema Espectral para Operadores Simétricos

Matheus Alexandre Alves Anzolin
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
matheusalves2107@hotmail.com

Paulo Domingos Conejo
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
pconejo33@gmail.com

Resumo: O Teorema Espectral se consolida como um importante resultado da Álgebra Linear que permite garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores para alguns tipos de operadores. Neste trabalho, temos interesse nos elementos da Álgebra Linear, com enfoque no Teorema Espectral para operadores simétricos.

Palavras-chave: Operadores Simétricos; Teorema Espectral; Álgebra Linear.

1 Introdução

O Teorema Espectral se caracteriza como um dos mais importantes resultados da Álgebra Linear, possuindo várias versões, cada uma atendendo um tipo diferente de Operador Linear. De modo geral, nos é garantindo por meio deste resultado o fato de todo operador simétrico possuir uma base ortonormal de autovetores, o que implica no operador ser diagonalizável. PONCIANO, 2017, nos fala a respeito da importância do Teorema Espectral para operadores Compactos e Auto-adjuntos no contexto da Teoria Espectral, que abrange espaços de dimensão infinitas, como espaços de Banach e Hilbert.

Em consonância com tal trabalho, temos também YONEDA, 2013 que nos leva a uma motivação maior para o estudo do Teorema espectral, como no trabalho anterior, para operadores compactos e auto-adjuntos, mostrando a relação entre Física Quântica e o renomado teorema, mostrando que por meio dele se torna razoável trocar funções quaisquer por operadores em espaços de Hilbert. Outro fato a respeito deste resultado é que tanto em sua forma matricial como na algébrica pode ser expandido para o âmbito dos quatérnios, é isso em que FERENICK, 2003 nos mostra, objetivando trazer uma demonstração para o resultando para os dois casos, matricial e algébrico.

Ademais, o Teorema Espectral torna possível caracterizar um operador auto-adjunto por meio de sua medida espectral. Segundo SIMSEN, 2017 esta caracterização é de suma importância para se ter uma relação entre a classificação espectral e o comportamento dinâmico das soluções da Equação de Shrödinger. SIMSEN, 2017 ainda comenta que para discutir sobre o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos, que é o objetivo de seu trabalho, é necessário um estudo das Resoluções da Identidade (Famílias Espectrais).

Contudo, podemos falar também do Teorema espectral para alguns tipos de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. Segundo HOFFMAN, 1979 o Teorema Espectral possibilita escrever o Operador Normal, como combinação linear de projeções ortogonais. E quando se trata de operadores simétricos, segundo RAVASSOS, 2013 possibilita a classificação de cônicas, quádricas e torna a composição de funções reais mais simples, além de ser um caso particular do Teorema Espectral para operadores Auto-adjuntos. Em conformidade com isso, o presente trabalho tem por objetivo esmerar-se em estudar elementos da Álgebra Linear, com enfoque no Teorema Espectral para Operadores Simétricos.

2 Prelúdio ao Teorema Espectral

Nesta seção serão abordados alguns resultados considerados de suma importância para entender a demonstração do Teorema Espectral para Operadores Simétricos.

Definição 1. Seja $\mathbb{V} \neq \emptyset$, com as operações soma $+: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e multiplicação $*: \mathbb{K} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por escalar definidas. O conjunto $\mathbb{V}$ se diz Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, um corpo, quando as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Sobre a operação $+$, $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$:

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

$$u + v = v + u.$$

$$\exists 0 \in \mathbb{V} \text{ tal que } u + 0 = u.$$

$$\exists -u \in \mathbb{V} \text{ tal que } u + (-u) = 0.$$

2. Sobre a operação $*$, $\forall u, v \in \mathbb{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$$

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

$$(u + v)\alpha = u\alpha + v\alpha.$$

$$1u = u.$$

Exemplo 1. O conjunto $\mathbb{R}$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Com respeito a soma e a multiplicação, quando são atendidas suas propriedades, diz que $\mathbb{V}$ é fechado para a soma e fechado para multiplicação por escalar. Vale ressaltar também que, a soma é uma dita lei de composição interna e a multiplicação uma lei de composição externa.

A próxima definição a ser postulada nos diz respeito um subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ que tem definido em si todas as operações de $\mathbb{V}$. Chamamos este conjunto de Subespaço Vetorial.

Definição 2. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um Subespaço de $\mathbb{V}$ é $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, tal que $\mathbb{W}$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações, adição e multiplicação por escalar herdadas de $\mathbb{V}$.

A seguir um resultado que torna prático concluir que um subconjunto de um Espaço Vetorial é um Subespaço Vetorial. É uma condição suficiente para se ter um Subespaço Vetorial.

Teorema 3. *Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ não vazio. $\mathbb{W}$ é Subespaço de $\mathbb{V}$ se, e somente se, $\forall u, v \in \mathbb{W}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, o vetor $u + \alpha v \in \mathbb{W}$.*

Prova. $\Rightarrow$) Se $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é Subespaço de $\mathbb{W}$ e não vazio então pela Definição 2 temos que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \mathbb{W} : \alpha v \in \mathbb{W}$. Logo, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in \mathbb{W}$, como $\mathbb{W}$ é fechado para soma $u + \alpha v \in \mathbb{W}$

$\Leftarrow$) Note que basta provar

- i) $0 \in \mathbb{W}$
- ii) $\forall u, v \in \mathbb{W} : u + v \in \mathbb{W}$
- iii) $\forall v \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{K} : \alpha v \in \mathbb{V}$

Suponha que $u + \alpha v \in \mathbb{W}$, $\forall u, v \in \mathbb{W}, \alpha \in \mathbb{K}$.

- i) $0 \in \mathbb{W}$: Pela hipótese temos que $\forall u, v \in \mathbb{W}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, o vetor $u + \alpha v \in \mathbb{W}$, então $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha v = -u$. Disto temos então que $u + (-u) = 0$. Logo $0 \in \mathbb{W}$.
- ii) Como $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in \mathbb{W} : u + \alpha v \in \mathbb{W}$ então basta tomar $\alpha = 1$, disto temos $u + v \in \mathbb{W}$. Diz então que $\mathbb{W}$ é fechado para Soma.
- iii) Se $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in \mathbb{W} : u + \alpha v \in \mathbb{W}$, então para $u = 0$ temos $0 + \alpha v = \alpha v \in \mathbb{W}$. Diz então que $\mathbb{W}$ é fechado para a operação multiplicação por escalar. Portanto $\mathbb{W}$ é Subespaço Vetorial de $\mathbb{V}$.

□

Exemplo 2. Se $\mathbb{V}$ é um Espaço Vetorial então, $\mathbb{V}$ é um Subespaço de $\mathbb{V}$.

Exemplo 3. $\{0\} \subset \mathbb{V}$ é um Subespaço de $\mathbb{V}$, denominado Subespaço Nulo de $\mathbb{V}$

Quando nos referimos ao elemento 0 pertencer à algum conjunto, estaremos nos referindo ao Vetor Nulo.

Teorema 4. *Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então $\mathbb{W} = \bigcap_{i=1}^n W_i$ é um Subespaço de $\mathbb{V}$, em que cada W_i são Subespaços de $\mathbb{V}$.*

Prova. Com efeito, pelo Teorema anterior é suficiente que $0 \in \mathbb{W}, \forall v, u \in \mathbb{W}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K} : u + \alpha v \in \mathbb{W}$.

De fato, $0 \in W_i$ para qualquer i . Sejam $u, v \in \mathbb{W}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ por definição de $\mathbb{W}$ temos que $u, v \in W_i$ para qualquer i , em que cada W_i são Subespaços de $\mathbb{V}$, então pelo Teorema 3 temos que o vetor

$$u + \alpha v \in W_i,$$

para qualquer i . Portanto $u + \alpha v \in \mathbb{W}$ ou seja $\mathbb{W} = \bigcap_{i=1}^n W_i$ é um Subespaço de $\mathbb{V}$

□

Definição 5. Se $V_1, V_2, \dots, V_k$ são Subespaços de $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, o conjunto de todas somas,

$v_1 + v_2 + \dots + v_k; v_i \in V_i$ é chamado de soma dos Subespaços. Diremos que a soma

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

é uma soma direta quando cada vetor $w \in W$ é expresso de modo único como $w = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, com $v_i \in V_i$.

A definição a seguir nos permite caracterizar uma base de um Espaço Vetorial, visto que um conjunto de vetores só é base quando gerar o Espaço todo e também for linearmente independente.

Definição 6. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$. $S \subset \mathbb{V}$ tal que $S = u_1, u_2, \dots, u_n$. S é dito conjunto linearmente dependente se existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0.$$

Se S não é linearmente dependente, se diz linearmente independente .

Definição 7. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma base de $\mathbb{V}$ é um conjunto linearmente independente e gera $\mathbb{V}$.

$\mathbb{V}$ diz de dimensão finita quando a base que o gerar for finita.

Note que um Espaço Vetorial é gerado por um conjunto linearmente independente, contudo não faz sentido dizer que um Espaço Vetorial é um conjunto linearmente independente, pelo contrário é um conjunto linearmente dependente, pois nele consta o vetor nulo.

Lema 8. *Seja $S \subset \mathbb{V}$, em que $\mathbb{V}$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, linearmente independente. Suponhamos que β seja um vetor em $\mathbb{V}$ que não esteja no Subespaço gerado por S . Então o conjunto obtido acrescentando-se β a S é linearmente independente*

A demonstração deste lema se encontra em HOFFMAN, 1979.

Note que uma base é um conjunto linearmente independente, se for uma base de um Subespaço, podemos, a grosso modo, estendê-la a uma base para o Espaço Vetorial que contém o Subespaço em questão.

Teorema 9. *Se W é um Subespaço de $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, todo o subconjunto linearmente independente de W é finito e é parte de uma base para W .*

Prova. Suponha $S_0 \subset W$ seja linearmente independente. Se $S \subset W$ é linearmente independente e $S_0 \subset S$ então S é um subconjunto de $\mathbb{V}$, linearmente independente. Então a quantidade de elementos presentes em S é menor ou igual que a dimensão de $\mathbb{V}$.

Pelo Lema 8, podemos estender S_0 a uma base para W , conseguindo assim gerar W por S_0 . Do contrário, $\exists \beta_1 \in W; S_1 = S_0 \cup \{\beta_1\}$ em que S_1 é linearmente independente pelo

Lema 8. Se S_1 gera W , feito. Senão $\exists \beta_2 \in W$; $S_2 = S_1 \cup \{\beta_2\}$ em que S_2 é linearmente independente. Assim, mantendo o procedimento até $\dim V$ teremos que

$$S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

que é uma base para W . □

A seguir uma definição que nos diz respeito ao conceito de uma função que vai de um Espaço Vetorial em outro, chamada de Transformação Linear.

Definição 10. Sejam V e W Espaços Vetoriais ambos sobre $\mathbb{K}$ e também $T : V \rightarrow W$, dizemos que T é uma Transformação Linear quando, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$ temos

- i) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.
- ii) $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

A seguir a definição de uma função a valores escalares, chamada de Produto Interno, é por meio dela por exemplo que podemos falar de distância no conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 11. Seja V um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um Produto Interno em V é uma função,

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

tal que $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

- i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- ii) $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;
- iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
- iv) $\langle u, u \rangle > 0$; Para $u \neq 0$.

Exemplo 4. Seja a função

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle = \sum_i x_i \overline{y_i}. \end{aligned}$$

O produto interno em questão é chamado de Produto interno usual, em que $\overline{y_i}$ significa o conjugado complexo, para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Quando o Espaço Vetorial tem em si definido um produto interno, dizemos que o Espaço Vetorial é munido com produto interno.

Note ainda que é por meio dos Produtos Internos que nos é possibilitado saber também o ângulo entre duas matrizes (que podem ser considerados vetores) ou o ângulo entre dois polinômios.

Mas e quando esta função que vai de Espaços Vetoriais em Espaços Vetoriais, ter como Domínio e Contra Domínio o mesmo Espaço Vetorial? É disto que a próxima definição tratará.

Definição 12. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ e T uma transformação Linear. Um Operador Linear T é uma transformação Linear, tal que $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

Definição 13. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e $\mathbb{W}$ subespaço de $\mathbb{V}$. Diz que $\mathbb{W}$ é invariante por T quando

$$T(W) \subset W.$$

Definição 14. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um Operador Linear e $\mathbb{K}$ um corpo. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T e $v \in \mathbb{V}$ não nulo, o autovetor associado a λ quando,

$$T(v) = \lambda v.$$

Note que o conjunto $G(v) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = \lambda v\}$ é o Autoespaço associado a v . Ainda, a definição de autovetor e autovalor nos diz que o $G(v)$, o Subespaço Vetorial de $\mathbb{V}$, associado ao autovalor λ , é invariante por T .

O próximo resultado nos dá uma caracterização para um escalar ser ou não um autovalor de um Operador Linear.

Lema 15. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) λ é um autovalor de T .
- ii) O operador $(T - \lambda I)$ é não inversível.
- iii) $\det(T - \lambda I) = 0$.

Prova. i) $\Rightarrow$ ii): Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Como $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T , $\exists v \in \mathbb{V} : v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Seja também $\beta_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$ temos que $[T(v)]_{\beta_1} = [T]_{\beta_1}[v]_{\beta_1}$ então

$$\begin{aligned} [T]_{\beta_1}[v]_{\beta_1} &= [\lambda v]_{\beta_1} \Rightarrow \\ [T]_{\beta_1}[v]_{\beta_1} - [\lambda v]_{\beta_1} &= 0 \Rightarrow \\ ([T]_{\beta_1} - \lambda I)[v]_{\beta_1} &= 0. \end{aligned}$$

Logo $[v]_{\beta_1}$ é uma solução não trivial para o sistema em questão, portanto o Operador $([T]_{\beta_1} - \lambda I)$ é não inversível.

ii) $\Rightarrow$ iii): É direto, pois se $([T]_{\beta_1} - \lambda I)$ é não invertível, então $\det([T]_{\beta_1} - \lambda I) = 0$ $\square$

A continuação da demonstração deste resultado pode ser encontrada em HOFFMAN, 1979, bem como HEFEZ, 2012.

Note que ao considerarmos $p(x) = \det(T - xI)$ dizemos que os autovalores de T são as raízes do $p(x)$.

Definição 16. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido com um Produto Interno. Dizemos que $\forall u, v \in \mathbb{V}$ são ortogonais quando,

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Definição 17. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ com um produto interno e S um conjunto arbitrário de vetores em $\mathbb{V}$. O complemento Ortogonal de S é o conjunto,

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{V} / \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Proposição 18. *Sejam $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W Subespaço de $\mathbb{V}$ com produto interno. Então*

- i) $W^\perp$ é um Subespaço de $\mathbb{V}$;*
- ii) $W \cap W^\perp = \{0\}$;*
- iii) $(W^\perp)^\perp = W$;*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em HOFFMAN, 1979, bem como HEFEZ, 2012.

Definição 19. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de produto interno. Dizemos que $S \subset \mathbb{V}$ é um conjunto ortogonal se dois vetores quaisquer de S são ortogonais.

Teorema 20. *Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, munido com um Produto interno usual. Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos de $\mathbb{V}$ é linearmente independente.*

Prova. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores ortogonais de $\mathbb{V}$. Queremos provar que tal conjunto é linearmente independente. Com efeito considere a seguinte equação

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

a fim de provar que cada $\alpha_i = 0$ com $1 \leq i \leq n$. Temos então que,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle &= \langle \alpha_1 v_1, v_i \rangle + \dots + \langle \alpha_i v_i, v_i \rangle + \dots + \langle \alpha_n v_n, v_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle. \quad (1)$$

Usando o fato de que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ com $j \neq i$ Por outro lado,

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0. \quad (2)$$

Portanto de (1) e (2) obtemos isto $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$, tendo em vista de que $v_i \neq 0$ temos que $\alpha_i = 0$. Logo como i foi tomado de maneira arbitrária em seu intervalo de variação, temos que o conjunto é ortogonal.

□

Proposição 21. *Se $\alpha = v_1, \dots, v_n$ é uma base ortonormal de V , então, para todo $v \in V$, podemos escrever*

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n.$$

O próximo resultado será apenas enunciado, ele nos garante que dado um $\mathbb{V}$ Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ então há uma base ortogonal para $\mathbb{V}$. O resultado é denominado de Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Proposição 22. *(Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt): Todo Espaço Vetorial finitamente gerado, possui uma base ortogonal.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em HEFEZ,2012.

3 O Teorema Espectral para Operadores Simétricos

Esta seção é exclusivamente dedicada para o Teorema Espectral para Operadores Simétricos e resultados usados em sua demonstração.

Levando em consideração que o Teorema Espectral que abordaremos neste trabalho é para Operadores Simétricos, se faz propício ressaltarmos que um Operador Simétrico não passa de um caso especial de um Operador Adjunto, como veremos a seguir, com a definição de Operadores Adjuntos.

Definição 23. Sejam $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido com um produto interno e $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um Operador Linear. Para cada T existe um Operador Linear $T^* : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle.$$

T^* é chamado Operador Adjunto de T .

Como supracitado, o Operador Simétrico é um caso especial do Adjunto quando temos $T = T^*$. Então a definição acima para Operadores Simétricos é a seguinte.

Definição 24. Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e munido de um produto interno. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, diz que T é simétrico quando,

$$\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle,$$

para quaisquer $v, w \in V$.

Observação 1. Se $[T]_A = [T]_A^t$, tal que A é uma matriz ortonormal de $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$, então o Operador T é Simétrico.

Exemplo 5. Seja

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ v &\mapsto T(v) = v \quad ; \quad v \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

É um Operador Simétrico denominado Operador Identidade, pois $\forall u, v \in \mathbb{V}$ temos

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

A seguir um dos resultados mais importantes usados como alicerce na demonstração do Teorema Espectral para Operadores Simétricos.

Teorema 25. *Sejam $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W Subespaço de $\mathbb{V}$, então*

$$\mathbb{V} = W \oplus W^\perp.$$

Prova. Pela Proposição 18, $W \cap W^\perp = \{0\}$. Vejamos que $V = W + W^\perp$. Pelo processo de Gram-Schmidt, existe uma base ortogonal, dividindo todos os termos desta base pelas suas respectivas normas, temos uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de W . Tomemos arbitrariamente $v \in V$. Defina

$$w_1 = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n.$$

$$w_2 = v - w_1.$$

Note que $w_1 + w_2 = w_1 + (v - w_1) = v$. Além disso, $w_1 \in W$, já que w_1 é uma combinação de elementos da base de W . Portanto resta mostrar que $w_2 \in W^\perp$, ou seja w_2 é ortogonal aos elementos de W . Para isto, seja $w \in W$. Pelo Teorema anterior, podemos escrever

$$w = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle w, v_n \rangle v_n.$$

Com isso, temos que w_2 é ortogonal a w , pois,

$$\begin{aligned} \langle w_2, w \rangle &= \langle v - w_1, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle w_1, w \rangle \\ &= \langle v, \langle w, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle w, v_n \rangle v_n \rangle - (\langle \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n, \langle w, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle w, v_n \rangle v_n \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \langle w, v_i \rangle - \left(\sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \langle w, v_i \rangle \langle v_i, v_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal, temos que

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1.$$

Disto chegamos que $\langle w_2, w \rangle = 0$. Como w_2 foi tomado de modo arbitrário temos que w_2 é ortogonal aos elementos de W .

□

Note que a soma $v = w_1 + w_2$ é obtida de modo único.

Definição 26. Seja $A_{m \times n} = (a_{ij})$ com $0 < i < m$ e $0 < j < n$. O conjugado da matriz $A_{m \times n}$ é tal que $\overline{A}_{m \times n} = \overline{a}_{ij}$ com $0 < i < m$ e $0 < j < n$.

O resultado por conseguinte nos diz que todas as raízes do Polinômio Característico de um Operador Simétrico, digamos $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, em relação a uma base B do Espaço Vetorial, são reais. Representado por $P_{[T]_B}$

Teorema 27. *Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é um operador simétrico e α_1 é uma base de $\mathbb{V}$, então todas as raízes do polinômio característico $P_{[T]_{\alpha_1}}$ em $\mathbb{C}$ são números reais.*

Prova. Seja $A = [T]_{\alpha_1}$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra temos que P_A tem pelo menos uma raiz complexa, a saber λ . Logo o sistema homogêneo $(tI_n - A)Z = 0$ possui uma solução não trivial, $Z = [z_1, \dots, z_n]^T$ com coeficientes complexos. Queremos provar que λ é um número real. Pela Observação 1 a matriz A é simétrica com cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ temos a seguinte igualdade,

$$\overline{(AZ)}^t = \overline{Z}^t AZ.$$

Pois o conjugado de uma matriz com coeficientes reais é a própria matriz e a transposta de uma matriz simétrica é ela mesma.

Mas como A é a matriz representação do Operador T em relação a base α_1 podemos afirmar que, $AZ = \lambda Z$. Então aplicando isto na igualdade acima,

$$\overline{\lambda Z}^t Z = \overline{\lambda Z}^t Z = \overline{AZ} Z = \overline{Z}^t AZ = \overline{Z}^t \lambda Z = \lambda \overline{Z}^t Z.$$

Logo como

$$\overline{Z}^t Z = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \neq 0$$

temos que $\lambda = \overline{\lambda}$. Portanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por último falta provar que associado ao autovalor λ existe um autovetor em $\mathbb{R}^n$. Escrevamos $Z = X + iY$ sendo que $Z \neq 0$ e i a unidade imaginária. Da igualdade $AZ = \lambda Z$ obtemos,

$$\begin{aligned} A(X + iY) &= \lambda(X + iY) \\ AX + iAY &= \lambda X + i\lambda Y \end{aligned}$$

$\Rightarrow AX = \lambda X$ e $AY = \lambda Y$. Então X e Y é autovetor, com entradas reais, associado a λ . $\square$

Teorema 28. *(Teorema Espectral para Operadores Simétricos): Seja $\mathbb{V}$ um Espaço Vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal β de $\mathbb{V}$ tal que $[T]_{\beta}$ é diagonal.*

Prova. Por indução sobre a dimensão de $\mathbb{V}$. Se $\dim \mathbb{V} = 1$ então nada a se provar, pois $\mathbb{V}$ possui uma base com apenas um elemento, a saber $\beta = \{u_1\}$.

Suponha que o teorema se cumpra para $\dim \mathbb{V} = n$, com $n \geq 1$. Então queremos provar que vale para $\dim \mathbb{V} = n + 1$.

Seja α uma base de $\mathbb{V}$ e seja uma raiz complexa do polinômio $P_{[T]_{\alpha}}$. Pelo Teorema 27, $c \in \mathbb{R}$. Note que pelo Lema 15 c é autovalor de T , pois $\forall x \in \mathbb{C}$ considerando

$$P_{[T]_{\alpha}}(x) = \det(T - xI),$$

e usando o Teorema Fundamental da Álgebra,

$$P_{[T]_\alpha}(c) = \det(T - cI) = 0.$$

Seja v um autovetor unitário de T associado a c . Consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{V}$,

$$W = \{w \in \mathbb{V}; \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Note que $W = G(v)^\perp$, que pelo Lema 18 é um Subespaço Vetorial de $\mathbb{V}$ e também, $G(v)$ é o autoespaço associado a c . Pela Definição 17, $G(v)^\perp$ é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{V}$ ortogonais a v .

Ainda, W é invariante por T ou seja, $T(W) \subset W$. De fato, como T é um operador simétrico, temos que $\forall w \in W$,

$$\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle = \langle w, cv \rangle = c\langle w, v \rangle = 0.$$

Donde $T(w) \in W$. Assim, considerando a restrição

$$S = T|_w \in \mathbb{L}(W, W),$$

que é um operador simétrico, pois uma restrição de um operador simétrico continua sendo um operador simétrico e $\mathbb{L}(W, W)$ o espaço de todas as transformações lineares de W em W . Pelo Teorema 25 temos $\mathbb{V} = G(v) \oplus W$ disto segue que $\dim G(v) = 1$ e $\dim W = n$. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução no Operador S , afirmamos então que existe $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de W ; $v_1, \dots, v_n$ são autovetores de S ($[S]_{\beta_1}$ é diagonal). Completando β_1 pelo Teorema 9 temos então,

$$\beta = \beta_1 \cup \{v\},$$

uma base de $\mathbb{V}$, ortonormal, pois v é unitário, formada por autovetores de T , então $\text{card} \beta = n + 1 \Rightarrow \dim \mathbb{V} = n + 1$. Disto $[T]_\beta$ é diagonal.

Sobre a demonstração, a ideia foi retirada de HEFEZ, 2012.

□

Conclusões

Concluimos que em um Espaço Vetorial de dimensão finita, em que nele atua um Operador Linear Simétrico, podemos garantir a existência de uma base para este mesmo Espaço Vetorial, em que a matriz representação em relação a base é diagonal. Tal fato em última análise significa que o Operador em questão é Diagonalizável.

Alguns fatos secundários mas não menos importantes a serem considerados, são os de que o complemento ortogonal de um Subespaço Vetorial, sendo este o autoespaço associado a um autovalor de T , é Invariante por T um Operador Simétrico.

Referências

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. Álgebra linear. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. 514 p

HEFEZ, Abramo. Introdução à Álgebra Linear/Abramo Hefez; Cecília de Souza Fernandez. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 328p. (COLEÇÃO PROFMAT, 01).

FERENICK, Douglas R.; PIDKOWICH, Barbara A.f.. The Spectral theorem in quaternions. Elsevier. Sask, 15 set. 2003. p. 75-102

SIMSEN, Mariza S.; RICARDO, Débora Ferreira. Teorema Espectral. In: ENCONTRO MINEIRA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, 11., 2017, Poço de Caldas. Anais... . Itajubá: Unifei, 2017. p. 1 - 2. Disponível em: <http://emed.mat.br/aceitesposterres/deboraricardo.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2018.

YONEDA, Gabriela Silmaia da Silva. Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-Adjuntos. 2012. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, 2013.

RAVASSOS, Marco Antônio; SOUSA, Fernando Pereira. O Teorema Espectral para Operadores Simétricos. In: ENCONTRO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 0., 2013, Presidente Prudente. Anais... . Presidente Prudente: Ufms, 2013. p. 1 - 7.

PONCIANO, Raoní Cabral. Teoria Espectral. 2017. 105 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

Deduzindo o teorema de Pitágoras com papel sulfite

Lyncon Cezar de Brito

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, *campus* Cascavel
lynconbrito@gmail.com

Renan Paglarini Davela

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, *campus* Cascavel
renanpaglarini@gmail.com

Alessandra dos Santos

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, *campus* Cascavel
alessandra.santos23@unioeste.br

Resumo: Apresentamos nesse trabalho uma alternativa para o ensino de relações métricas no triângulo retângulo e do teorema de Pitágoras, por meio de uma atividade que envolve a utilização de material manipulável e uma sequência didática, e a visualização de proporções e semelhanças entre triângulos (comparação). Para melhor justificar esta abordagem em sala de aula, apresentamos também, na introdução deste artigo, alguns resultados obtidos por pesquisas que foram realizadas com o objetivo de identificar a natureza das dificuldades apresentadas por estudantes da rede pública no aprendizado de tais relações. Propomos por fim que os alunos tenham suas capacidades cognitivas estimuladas por meio do uso de materiais manipuláveis, como formas alternativas de representações desses objetos.

Palavras-chave: Material manipulável, Triângulo retângulo, Relações métricas.

1 Introdução

Dificuldades de aprendizagem da matemática, apresentadas por estudantes da rede pública nas escolas brasileiras, é um assunto recorrente nos trabalhos de pesquisa em educação. Na plataforma google acadêmico são aproximadamente 69,5 mil trabalhos publicados, sendo alguns desses a respeito especificamente das dificuldades relativas ao ensino-aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo. Esse é o caso das pesquisas de Silva e Thomaz Neto (2006) e Dionizio e Brandt (2011), que analisaram a natureza das dificuldades apresentadas por alunos de escolas públicas no aprendizado dessas relações e sob diferentes perspectivas.

Silva e Thomaz Neto (2006) identificaram que alguns erros, cometidos pelos alunos de uma escola do Pará, se devem à dificuldades apresentadas na identificação dos conceitos e definições de objetos como hipotenusa e cateto. Eles mostraram esse fato observando que os alunos que não haviam conseguido identificar corretamente os elementos do triângulo foram os mesmos que não conseguiram escrever as relações corretamente. Já Dionizio e Brandt (2011), aplicando algumas atividades em uma turma do Paraná, chegaram a conclusão de que os alunos utilizavam diferentes representações de um mesmo objeto matemático como se representassem objetos diferentes.

Fundamentando-se na teoria dos Registros da Representações Semióticas de Duval (2009), Dionizio e Brandt (2011) observaram que, em alguns procedimentos, os alunos demonstraram não fazer a articulação entre as representações e os respectivos objetos que representam. O trabalho revelou as dificuldades apresentadas pelos alunos em virtude da não congruência semântica entre dois sistemas de representação semiótica diferentes¹. A pesquisa concluiu que os alunos não efetuam a inter-relação cognitiva dos objetos representados com suas representações, e isso revela a necessidade de uma mudança na maneira como os conteúdos são apresentados, para que haja uma superação das dificuldades apresentadas. No entanto, é ressaltado que o trabalho com os diferentes tipos de representação não é suficiente para a compreensão do objeto matemático, mas sim, é preciso que haja uma constante articulação entre eles, explorando os objetos apresentados e valorizando a operação cognitiva de conversão².

Entendemos que, além desses fatores identificados pelos autores dessas pesquisas, também ocorre que muitos professores não efetuam a dedução lógica de algumas fórmulas importantes, tais como o teorema de Pitágoras³. A ausência dessa dedução, além de algumas outras discussões importantes, ou até mesmo das definições dos conceitos que são utilizados na apresentação de fórmulas ou relações métricas, influenciam os alunos na compreensão e utilização desse conhecimento na resolução de problemas, ou mesmo na obtenção de novos resultados teóricos (formais ou não) (SILVA e THOMAZ NETO, 2006).

Com respeito ao teorema de Pitágoras, cada vez mais livros trazem deduções de seu desenvolvimento (CHAVANTE, 2015; RIBEIRO, 2010; GAY, 2014) e isso é muito importante, pois, segundo Soares (2014), o livro didático é o instrumento mais utilizado no contexto escolar pelos professores. No entanto, cabe ressaltar, que é importante estimular o desenvolvimento do conhecimento de diferentes formas, e não apenas das apresentadas no livro. Sendo assim, sugerimos nesse trabalho a utilização de material manipulável para a dedução do teorema de Pitágoras.

Desse modo, o que fazemos aqui é fornecer uma sequência didática que julgamos cativante, isto é, que pode chamar muito a atenção dos alunos por conta de utilizar-se de materiais manipuláveis. Além disso, como propõem Dionizio e Brandt (2011), podem fornecer uma quantidade bastante interessante de formas de representações semióticas de triângulos retângulos, ajudando na conversão e articulação das diferentes representações.

É importante ter claro que algumas definições prévias são de vital importância para que, nesse estágio da construção dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, seja possível executar essa sequência didática aqui apresentada, o que nem sempre é possível garantir devido a eventuais mudanças de professores em turmas de escolas públicas. Não queremos aqui abordar essas eventualidades que poderiam ser resolvidas por alguma ferramenta de computador por exemplo, mas no que tange a essa sequência específica, procuramos deixar claro quais são os

¹Essa congruência é definida por Duval (2009) como sendo um relação de coerência semântica relativa à ordem de apresentação das ideias.

²Que se trata de uma mudança de representações de um sistema semiótico para outro congruente.

³No nível básico é comum tratar o teorema de Pitágoras apenas como uma fórmula capaz de resolver alguns problemas matemáticos simples, sem entrar em detalhes relativos à sua apresentação formal.

conceitos que deverão ser apresentados na aula.

2 Desenvolvimento metodológico

Devemos iniciar a atividade, em sala, distribuindo o material que será utilizado pelos alunos, que são: folha sulfite (de preferência colorida), régua, tesoura e caneta.

Com todos os materiais em mãos, o que fazemos primeiro é pegar a folha sulfite e, nela, traçarmos, com a régua⁴, uma de suas diagonais. Desse modo obtemos dois triângulos como na Figura 1. Mantendo a folha disposta com o maior lado na horizontal (modo paisagem), marcamos seus lados com “ a ” na diagonal, e “ b ” e “ c ” nos lados horizontal e vertical, respectivamente, em ambos os lados da folha.

Neste estágio, já obtivemos pelo menos duas representações para os lados dos triângulos considerados. Uma é dada pelo traço e pelas extremidades da folha, e o outro pelas letras a , b e c . Ainda podemos reforçar a apreensão do objeto com uma representação auxiliar no quadro em forma de desenho.

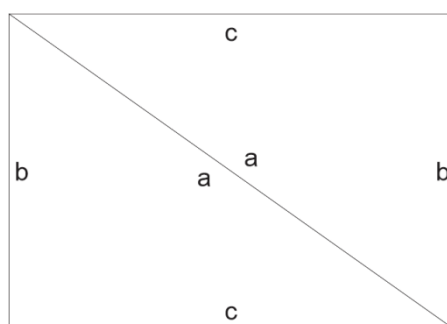


Figura 1: Esquematização da folha com a atividade desenvolvida

Em seguida, com a tesoura, dividimos a folha em dois triângulos cortando-a na diagonal como na Figura 2.

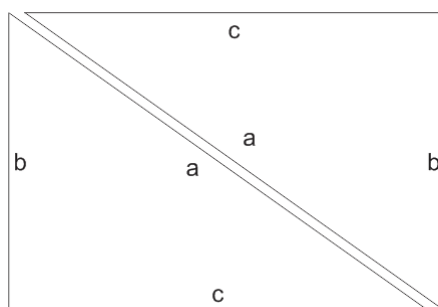


Figura 2: Corte diagonal da folha com a atividade desenvolvida

Com a folha cortada em dois triângulos, usando apenas um deles. Traçamos a sua altura,

⁴Pode-se usar também, se parecer melhor, o recurso da dobradura.

que chamamos de “ h ”, e em seguida o cortamos, obtendo assim dois triângulos como na Figura 3. Note que $a = m + n$.

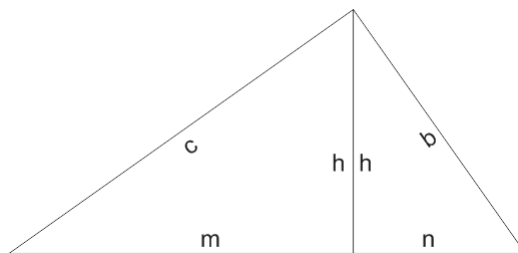


Figura 3: Corte na altura da folha com a atividade desenvolvida

Denominamos o triângulo maior (que não foi cortado) como triângulo I, e os dois menores como II e III, do maior para o menor. Utilizamos aqui, para melhor distinguirmos os triângulos, rosa para o II e amarelo para o III (Figura 4).

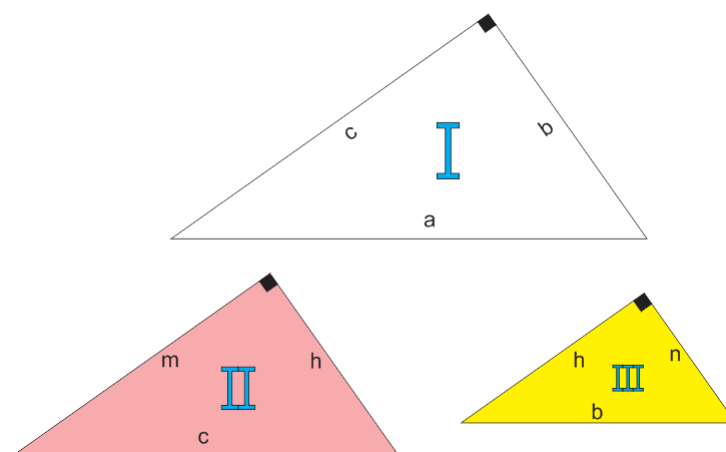


Figura 4: Triângulos obtidos da folha com a atividade desenvolvida

Não é necessário que as folhas sejam coloridas e, mesmo que forem (a menos que forem pintadas), não serão distinguíveis por cores. Tem-se também que, além do fato destes triângulos poderem ainda serem representados na linguagem natural por “maior”, “do meio” e “menor”, o ato de representá-los por I, II e III atribui ainda mais formas de representação a esses triângulos que, como ressaltado anteriormente, precisam ser articuladas, de modo a não tornar o processo de apreensão do objeto algo desinteressante e inacessível aos estudantes.

Cabe ressaltar ainda que, de acordo com as ideias da Semiótica de Peirce (1977)⁵, os símbolos utilizados, como os números romanos e as eventuais denominações discursivas, surgem como partes de um enredo de natureza esporádica, um fenômeno semiótico local. Estes símbolos são utilizados com o objetivo momentâneo de servirem a um fim específico: o de fornecerem uma forma escrita (e eventualmente discursiva) de representar nossos objetos.

⁵Uma das teorias sob a qual se baseou Raymond Duval no desenvolvimento de sua teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Estes símbolos possuem um caráter efêmero, de modo que estes, diferentemente dos desenhos, não chegam ao ponto de “incorporar” o objeto que se quer representar. O desenho e as formas materiais por sua vez, assumem o *status* de ícone (no sentido da Semiótica Peirciana) por sua verossimilhança com o objeto representado, por fazerem uma alusão direta a esse objeto. Além disso, a ordem de apresentação dos símbolos nas diferentes representações tenta garantir o que (DUVAL, 2009), de acordo com Dionizio e Brandt (2011), chama de congruência semântica entre os diferentes sistemas semióticos de representação.

Voltando ao nosso desenvolvimento, note que os triângulos obtidos são semelhantes (ver Figura 5). De fato, pelo caso de semelhança de triângulos que garante que: dados dois triângulos, se dois dos seus ângulos possuem a mesma medida, então eles são semelhantes.

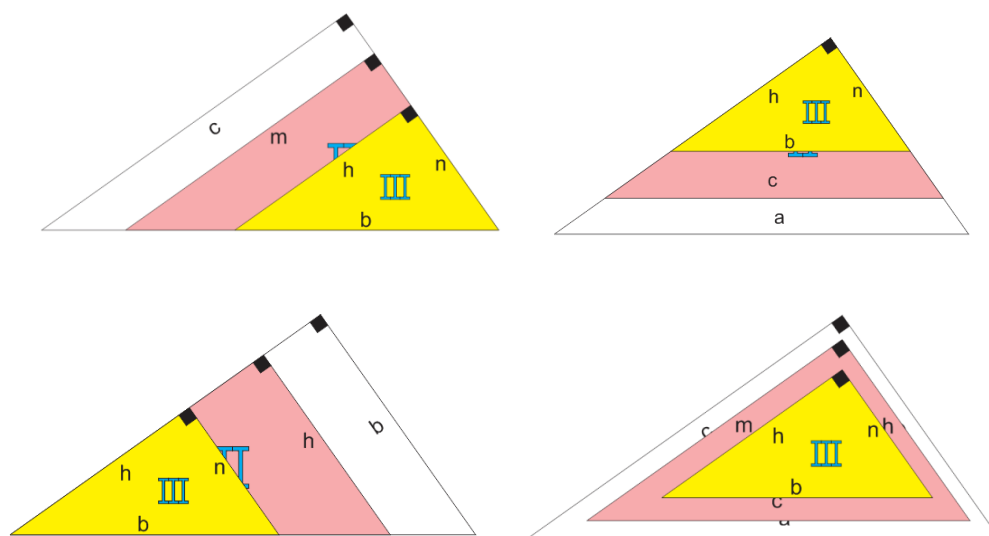


Figura 5: Observações que podem ser desenvolvidas com os alunos.

Nada garante que estes triângulos tenham exatamente seus ângulos congruentes, porém é interessante ressaltar que nossos triângulos são apenas representações dos objetos geométricos que cumprem com as propriedades do que chamamos de triângulo retângulo. Apesar disso, a representação por meio de desenhos geométricos não são nada melhores que essa em termos de precisão.

Nesse momento, é importante que os alunos percebam por si mesmos a semelhança destes triângulos. Entendam em que sentido eles possuem medidas proporcionais e discutam entre si a respeito de quais propriedades eles pensam que podem garantir essa proporção entre eles (Figura 5).

O próximo passo é comparar os triângulos. O que é importante a ser considerado em nossas comparações é que, por abuso de linguagem, utilizamos as mesmas letras para representar tanto os segmentos em seus respectivos triângulos quanto suas medidas (Figura 6). Isso posto faremos a comparação entre os triângulos I e II, I e III, e II e III.

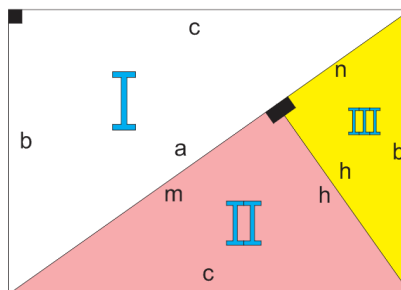


Figura 6: Triângulos formados na folha de sulfite e que serão comparados pelos alunos.

Comparando I e II

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \quad (1)$$

ou

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc$$

Comparando I e III

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \quad (2)$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow ah = bc$$

Comparando II e III

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn.$$

Somando as equações (1) e (2), temos:

$$c^2 + b^2 = am + an$$

$$c^2 + b^2 = a(m + n).$$

Como $a = m + n$, obtemos:

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad a^2 = c^2 + b^2,$$

que é o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo.

Apesar de nossa demonstração ter sido bastante direta, em sala de aula a dedução deve ser feita procurando sempre manter um certo nível de participação dos alunos na obtenção das relações que são importantes e que, juntas, conduzem ao teorema de Pitágoras. Com isso, é preciso que o docente esteja constantemente ressaltando ideias importantes relativas às medidas, à forma como as representamos, à noção de que o uso de letras presume a generalização do conceito de medida, e das propriedades que são válidas para as operações com números reais.

Conclusões

Baseados nas ideias de Dionizio e Brandt (2011), concluímos que é de vital importância que os alunos procurem sempre, na medida do possível, discutirem entre si, ou mesmo refletirem, a respeito da natureza dos objetos que essas formas significantes pretendem representar. Não queremos aqui, no entanto, propor qualquer espécie de discussão a nível ontológico, apesar de entendermos que essa é completamente bem vinda no ambiente da sala de aula. O que pretendemos propor, é que os alunos sejam constantemente motivados a pensarem a respeito de que tipo de objetos trata a Matemática, sob que formatos esses se manifestam na natureza ou em formas artificiais de representação, e a terem, com isso, despertadas suas curiosidades científicas e filosóficas.

Assim, no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, tais como as relações métricas, sugerimos a utilização de materiais manipuláveis para estimular ainda mais os alunos e promover uma maior conversão e articulação das diferentes formas de representação.

Agradecimentos

Explanamos aqui nossos sinceros agradecimentos à Profa. Dra. Rosangela Villwock por suas ideias originais que foram aqui meramente exploradas. Sua contribuição com a ideia como também com a revisão de alguns conceitos sobre geometria possibilitaram a produção desse artigo.

Referências

- CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Matemática 9**. São Paulo: Edições Sm, 2015. Coleção Convergências.
- DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (EDUCERE), 10, 2011, Curitiba. **Anais...** . p. 4408 - 4421.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- GAY, Mara Regina Garcia (Ed.). **Araribá Plus Matemática 9**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.
- PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 1977. 352 p.
- RIBEIRO, Jackson. **Matemática 9.º ano**. São Paulo: Scipione, 2010. Projeto Radix.
- SILVA, Dilvana M. Melo da; THOMAZ NETO, Mario O. Conhecimentos de estudantes do Ensino Médio sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo. In: SIMPÓSIO

INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEMAT).

Anais... . Recife: Programa de Pós-graduação em Educação, Centro de Educação da UFPE, 2006. p. 1 - 11.

SOARES, F. dos S. Adoção, avaliação e circulação de livros didáticos de matemática no século XIX. **Zetetike**, 21(2), 37-58. 2014.

Uma experiência com o uso de Realidade Virtual em sala de aula no ensino de matemática

João Alfredo Simon Santos
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
joaoalfredosimon@hotmail.com

Matheus Alexandre Alves Anzolin
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
matheusalves2107@hotmail.

Resumo: O objetivo do presente trabalho é relatar uma experiência com o uso da Realidade Virtual em uma aula que fazia referência ao dia comemorativo da Matemática. Foram abordados alguns problemas de raciocínio lógico matemático de uma forma lúdica e de fácil compreensão e, é claro, que faziam referência ao Malba Tahan. Utilizamos materiais de fácil acesso e também foram utilizados os celulares dos alunos.

Palavras-chave: Realidade Virtual; Tecnologia; Ensino.

1 Introdução

Com o advento da tecnologia, tudo passou a ser mais fácil na vida do ser humano, tanto em relacionamentos, quanto na tarefa de fazermos compras, etc. Com o conhecimento não foi diferente, hoje em diversos tipos de plataformas tecnológicas disponíveis pela internet, nos é possibilitado o acesso rápido e, diga-se de passagem frívolo ao conhecimento, seja ele de qual espécie for. Essa evolução nos meios tecnológicos afeta diretamente o ensino, pois entre estar aberto para aprender de uma forma diferente da que conhecemos ou assistir uma tradicional aula expositiva, a primeira opção prevalece na maioria dos casos.

Consonante a isso, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) que nos dizem a respeito da relação que os alunos devem fazer com a realidade que o permeia com as informações adquiridas em classe, formando assim um conhecimento relevante. Mas como cativar a atenção de um público cativado pela tecnologia, imerso num emaranhado de entretenimento? A tecnologia parece ser uma boa opção.

Outro aspecto importante e que concorda com a resposta citada anteriormente é o fato do uso de jogos no ensino estimular de uma maneira diferente, pois proporciona ao aluno um ambiente de interação com o meio em que ele está inserido, com o sujeito que está ao seu redor e com o conhecimento, ou seja, proporciona um mútuo aprendizado pois segundo Lara, “com a participação do(a) aluno(a) nos jogos e sua necessária participação ativa, o(a) professor(a) poderá perceber suas reais dificuldades, auxiliando-o a saná-las.” (LARA, 2003, p.25).

O uso de tecnologias entra nesta etapa do ensino, pois na contemporaneidade os processos de humanização se modificaram também, existe uma necessidade de fazer uma transposição

didática da realidade do aluno para o contexto escolar para facilitar a abstração dos conceitos, visto que o contexto do aluno hoje em dia está saturado de tecnologia, é mais que natural percebê-la nos processos de ensino-aprendizagem. E isto vai de acordo com o que Leontiev nos diz: “A criança no momento do nascimento, não passa de um candidato a humanidade, mas não pode alcançar no isolamento: deve aprender a ser um homem na relação com os outros homens.” (LEONTIEV apud BOCK, 2001, p. 238).

Visto também que além de estarem inseridos nestes contextos tecnológicos os alunos de hoje possuem uma inclinação natural para jogos, seja lá qual a natureza destes, em concordância com o que foi dito, temos novamente o que os PCN’s nos dizem a respeito do uso de jogos:

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exijam soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p.46).

Tendo em vista, como foi explicado, que o uso de jogos com a tecnologia favorece a humanização dos alunos, bem como a apropriação do conhecimento de forma significativa. Será que se existisse algo que relacionasse de uma forma intrínseca a realidade tecnológica, jogos e o ensino de alguns conceitos, teríamos aulas um tanto quanto mais proveitosas?

Relataremos a experiência do uso da Realidade Virtual associada a jogos no desenvolvimento de um plano de aula voltado para o dia da matemática, para alunos de oitavos anos do ensino fundamental e terceiro do ensino médio do Colégio Estadual Pacaembu – Cascavel/PR.

2 Sobre o Dia Nacional da Matemática

Desde 2013, é comemorado oficialmente o Dia Nacional da Matemática, homenageando o exímio matemático Júlio César de Melo e Souza, o Malba Tahan. Sua principal obra é “O homem que calculava”, rico em problemas matemáticos que são possíveis de se realizarem concretamente.

Em 26 de junho de 2013 foi publicada no Diário Oficial da União a Lei 12.835 que torna o dia 6 de maio o Dia Nacional da Matemática. Esse dia foi escolhido em homenagem a Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo seu pseudônimo, Malba Tahan, que nasceu em 6 de maio de 1895, no Rio de Janeiro. Mas desde 1995, centenário de Malba Tahan, uma comissão já havia proposto o desenvolvimento das atividades para os alunos do Brasil inteiro. (JURISDIÇÃO LEI Nº 12.835/2013 ; INFOESCOLA)

Malba Tahan foi reconhecido na área educacional, pois foi um dos introdutores de atividades lúdicas em aulas de matemática, além de ser exímio escritor, com várias publicações voltadas à matemática.

3 Sobre a Realidade Virtual (V.R.)

A Realidade Virtual é algo que proporciona, a quem utiliza, uma sensação de estar com seus sentidos enganados, pois a sensação é que a pessoa realmente está na realidade que está enxergando. O que proporciona tal experiência ao usuário são os efeitos visuais, sonoros e seu sistema de 360°, que fazem essa imersão ainda maior. Hoje os Óculos de Realidade Virtual são responsáveis por fazer essa imersão, tendo suas variações por marcas. Segundo COUTINHO (2015) em um dos seus artigos para o techtudo, foi apresentado ao mundo o View Master. Este instrumento dava a sensação de estar no local da foto, mas com o seu disco giratório acabava proporcionando a troca rápida de paisagem, assim proporcionando outras experiências em com fotos de locais diferentes.

Por isso, optamos por utilizar e trabalhar com a Realidade Virtual para o projeto do dia da Matemática. A ideia seria proporcionar aos alunos a oportunidade de perceber que podem aprender Matemática de todo e qualquer modo.

Para esse projeto, foram feitas 3 atividades em ambiente virtual, uma no ambiente real e um problema final totalizando cinco atividades, são elas:

1. A primeira atividade, o problema das cinco escravas, presente no livro de Malba Tahan;
2. A segunda, um jogo de coordenadas cartesianas;
3. Terceira um labirinto matemático;
4. Quarta, problema dos jarros de água será feito na realidade convencional.
5. A quinta atividade, se caracteriza como o problema principal que será composta da seguinte forma, cada um desses desafios, quando completados, gera uma recompensa para o grupo: um fragmento de um quinto desafio, que só é possível de ser interpretado e entendido apenas com os quatro fragmentos obtidos.

4 Sobre as atividades

1ª Atividade: O Problema das Cinco Escravas

A atividade tinha por objetivo fazer com que os alunos se valessem do Óculos Realidade Virtual para observarem um cenário preparado que remontava o contexto do problema das Cinco Escravas. A seguir o problema, tirado de TAHAN, (2002),

“O problema, na sua expressão mais simples, é o seguinte: Tenho cinco lindas escravas; comprei-as há poucos meses, de um príncipe mongol. Dessas cinco encantadoras meninas, duas têm os olhos negros, as três restantes têm os olhos azuis. As duas escravas de olhos negros, quando interrogadas, dizem sempre a verdade; as escravas de olhos azuis, ao contrário, são mentirosas, isto é, nunca dizem a verdade. [...]Eis aí - confirmou o emir com certo orgulho. - Eis aí as cinco jovens do meu harém. Duas têm (como já disse) os olhos pretos - e só dizem a verdade. As outras três têm os olhos azuis e mentem sempre! [...]Ao calculista seria facultada a liberdade de argüir três das cinco raparigas. Como, porém, iria descobrir, pelas respostas, a cor dos olhos de todas elas? Qual das três deveria ele interrogar? Como determinar as duas que ficariam alheias ao interrogatório?”

Neste problema os alunos poderiam analisar de forma lógica e resolverem por eliminação, contudo o que se percebeu foi, quanto mais desinteressado o grupo ficava menos análise do problema existia, então a resolução se dava por tentativa e erro, a interface da realidade virtual facilitava neste aspecto.

2ª Atividade: O jogo de Coordenadas Cartesianas

Em Realidade Virtual, foi feito um espaço tridimensional, similar a uma sala gigante e, o chão desse espaço contém um plano cartesiano. Ao iniciar a atividade, uma frase aparece acima do plano cartesiano, em formato de uma dupla ordenada, da seguinte forma:

proposição; proposição

Cada proposição pode ser interpretada como um número. Assim, cada frase corresponde a um par ordenado. Assim que descoberto o par, deve-se encontrá-lo no plano cartesiano, para liberar a próxima frase. São 10 frases ao todo e completa-se a atividade quando os 10 pares ordenados forem corretamente localizados.

Por meio deste jogo foi possível, principalmente para os alunos dos oitavos anos do ensino fundamental, explicar o conceito de plano cartesiano, muitos entenderam, até por que já haviam visto o conteúdo, foi de bom proveito a eles, já com o pessoal do terceiro ano foi mais questão de relembrá-los as características do conteúdo.

3ª Atividade: Labirinto

Em Realidade Virtual, foi construído um labirinto. O objetivo desse desafio, além de encontrar a saída, é somar a quantidade certa de pontos, 21 nesse caso.

Há muitos caminhos para a saída, mas apenas um caminho leva pra fora do labirinto e soma 21 pontos. Outros caminhos podem somar mais ou menos pontos. Consegue-se os pontos andando pelo labirinto. Assim que se passa pela saída, se exatamente os 21 pontos foram obtidos, o desafio é completado.

O objetivo deste jogo era simples, apenas exercitar a perseverança dos alunos e o raciocínio lógico dos alunos, visto que eles deveriam passar pela linha de chegada com exatamente 21 pontos, nem mais nem menos. Todas as turmas gostaram de jogar, pois os desafiavam a correr pelo caminho certo e quando entravam pela linha de chegada com a quantidade incorreta eram forçados a refazer o caminho para encontrar os 21 pontos, o que fazia com que os alunos

permanecessem mais tempo na Realidade Virtual.

4ª Atividade: Problema dos Jarros de Água

Dispomos de dois baldes de água. Um com capacidade de 5 litros e outro com capacidade de 9 litros. Queremos que o balde de 9 litros fique, exatamente, com 7 litros. Como fazer isso de modo correto? Problema este retirado do livro do POLYA (1978), sobre resolução de problemas, tinha como objetivo estimular o raciocínio lógico dos alunos, bem como a estratégia de como resolver um problema da melhor maneira possível.

Muitos alunos nesta atividade procuraram por métodos, algoritmos que aprenderam em sala que de alguma forma o resolvesse, teve até aluno apelando para regra de três, o que não fazia sentido visto que os vasilhames não eram nem metrados, isto foi percebido em todas as turmas, tanto de oitavos do ensino fundamental como de terceiros do ensino médio, mostrando-nos um interesse dos alunos de oitavo em aprender ou um desinteresse dos alunos de terceiros anos pela atividade. Vale ressaltar que esta atividade foi feita fora do ambiente da realidade virtual.

5ª Atividade: Problema dos Três Reis

Um certo homem estava passando por uma região conhecida por possuir três reinos, governados por três reis conhecidos por suas grandes benevolências. Tal homem passava por necessidades e tinha uma quantidade pífia de denários consigo, então ele decide passar pelos três reinados e fazer a seguinte proposta: “Oh generoso rei, pela sua boa vontade, se tu duplicares minha quantia de dinheiro atual, deixarei como oferta 10 denários”. Este homem passa pelos três reinos e ao final termina sua jornada sem nenhum denário. Quantos denários ele possuía inicialmente?

Este problema foi um problema adaptado de um outro de fonte desconhecida, um tanto quanto polêmico, por tratar de uma quantia recebida três vezes e no final não possuir mais nada. Foi fonte de muitas discussões entre os grupos participantes, tanto nos oitavos do fundamental como nos terceiros do ensino médio.

A estratégia mais fácil a ser utilizada para resolvê-lo é fazer um raciocínio inverso, se ele tinha nada de denários no final, mas deu dez e antes teve seu dinheiro duplicado, quanto ele tinha de denário consigo quando visitou o segundo rei? E assim por diante.

Algo interessante a ser ressaltado é que este problema foi facilmente resolvido pelos alunos do oitavo ano do ensino fundamental, enquanto os alunos do terceiro ano do ensino médio pensaram e se concentraram apenas em fazer um raciocínio linear, partindo do começo para o fim.

Considerações finais

Quando fora desenvolvida a atividade envolvendo a Realidade Virtual, remontou justamente o que Leontiev nos diz com sua tese de a criança ser um candidato a humanidade e realiza o feito somente no convívio com outros seres humanos. Pois na medida em que as

crianças foram se envolvendo na atividade houve um mútuo aprendizado, tanto social quanto lógico matemático.

Ainda conseguimos notar a diferença de se trabalhar alguns conceitos matemáticos de modo lúdico tal qual como os PCN's nos diz, até por que em uma situação usual de sala de aula, a maioria dos alunos se encontrariam desinteressados com o conteúdo de geometria analítica, no entanto o jogo do plano cartesiano foi um sucesso considerando o envolvimento dos alunos na atividade, mostrando a diferença que o contexto que permeia os processos de ensino aprendizagem faz na vida do aluno.

E por fim mas não menos importante, a reflexão sobre a prática que nos foi possibilitada como professores ao realizar tal atividade, mostrando a heterogeneidade da aprendizagem na prática, bem como a importância de mostrar a matemática, mesmo que com problemas lógico matemáticos simples, de uma maneira mais prática para os alunos.

Referências

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997/1998.
- LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Trad. Manuel D. Duarte. Lisboa, Livros Horizonte, 1978.
- LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.
- TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. 58ª edição. Rio de Janeiro, Editora Record, 2002. 300 páginas.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- <https://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2015/09/o-que-e-realidade-virtual-entenda-melhor-como-funciona-a-tecnologia.html> acessado em 27 de setembro de 2019, 18:41.

Um estudo histórico sobre a fórmula geral para a resolução da equação de segundo grau

Fernanda Carla de Oliveira
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
fernanda.oliveira12@unioeste.br

Nadya Beatriz Antunes Barroso
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
nadyabantunes@gmail.com

Alessandra dos Santos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
alessandra.santos23@unioeste.br

Resumo: Esse trabalho consiste em apresentar um pouco da história do desenvolvimento da chamada equação de Bhaskara. O objetivo é de descobrir melhor o processo de desenvolvimento da resolução das equações de segundo grau e o de desmistificar a nomeação utilizada no Brasil como "Fórmula de Bhaskara". Bhaskara foi um importante matemático indiano, mas não desenvolveu a fórmula geral para a resolução da equação de segundo grau, esse feito se deve ao indiano Sridhara.

Palavras-chave: Fórmula de Bhaskara, História da matemática, Equação quadrática.

1 Introdução

Conhecer a origem e evolução dos conhecimentos científicos e culturais é de suma importância e pode despertar a curiosidade nos alunos, até porque muitos enxergam a matemática como um campo obsoleto, em que não há mais nada para ser descoberto ou inventado. Um dos motivos pode ser pelo modo como os conteúdos são trabalhados, aparentando ter sempre a mesma forma, abstrata e sem contextualização.

Segundo Lopes e Ferreira (2013), conhecer a história do conteúdo que se está ensinando é também uma forma de prever erros e entender as dificuldades dos alunos. Eles afirmam que a ideia de que tudo está pronto e surgiu da maneira que conhecemos é, no mínimo, uma visão reducionista da matemática, pois descarta toda a sua utilidade em tempos passados e, até mesmo, atualmente.

Uma das motivações do desenvolvimento desse trabalho, se deve a observação realizada no 9º ano do Ensino Fundamental, por meio do estágio supervisionado, no qual uma aluna questionou seu professor a respeito da nomeação da "famosa" fórmula de Bhaskara. De forma equivocada a docente afirmou para a aluna que o nome da fórmula era em homenagem ao seu criador.

Após realizarmos uma discussão do comportamento aluno/professor, percebemos a necessidade de uma pesquisa sobre o conteúdo. Entendemos que a utilização da metodologia história da matemática poderia ter sido empregada pela docente, a fim de aproveitar o questionamento da aluna para fomentar o interesse de toda a turma pela história, origem e desenvolvimento da fórmula. A utilização dessa metodologia poderia trazer o conhecimento necessário para responder a aluna de forma coerente. Revisitando obras, percebemos que esse equívoco não se aplica apenas à docente do 9º ano que observamos. Muitos são os livros didáticos (BIGODE, 2015; ONAGA e MORI, 2015) que apresentam o nome “fórmula de Bhaskara” ao abordarem a solução de uma equação de segundo grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Associando a fórmula ao nome do matemático Bhaskara. Celestino (2013), comparando obras de história da matemática e livros didáticos, percebeu que os livros didáticos trazem informações inadequadas a respeito da história da equação de segundo grau.

A história mostra que a equação é muito mais antiga, e que muitos matemáticos já trabalhavam com soluções para a equação de segundo grau em séculos anteriores a Bhaskara. No Brasil, a fórmula da resolução de uma equação do segundo grau ficou conhecida como fórmula de Bhaskara, nos demais países é conhecida como “a fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau” (DIAS, et al., 2015).

Esse trabalho está organizado com uma breve revisão sobre a metodologia história da matemática, a seguir apresentamos a história da evolução da equação de segundo grau, a biografia de Bhaskara, a dedução da fórmula nos dias atuais e, no último capítulo, algumas considerações finais.

2 História da Matemática

A história da matemática, é relevante para a compreensão da evolução do conhecimento e pode ser utilizada como um recurso para entender os processos de formação do pensamento matemático do aluno (OLIVEIRA, et al., 2014; GULIN e ROSÁRIO, 2014).

No Brasil, segundo Miguel e Miorim (2004) os movimentos sobre história da matemática iniciaram por volta da década de 80, e se intensificaram após a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) em 1999. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997), conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo.

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (PCN, 1997 p. 34)

Alguns autores (D'Ambrosio, 1996; GULIN E ROSÁRIO, 2014; BRITO e HEISIG, 2016)

corroboram com a ideia de que o objetivo da história da matemática é de contextualizar os conteúdos, despertando no aluno a consciência histórica a partir do conhecimento do passado. Assim, a matemática pode ser vista também como parte da cultura, no processo evolutivo dos povos que desenvolveram conceitos matemáticos. Contribuindo para a construção de uma visão mais crítica por parte dos alunos.

Por meio do conhecimento da história da matemática é possível perceber que as teorias que hoje aparecem demonstradas e acabadas, resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço.

3 História da Equação de Segundo Grau

Segundo Santana (2013), há mais de 4.000 anos, várias civilizações desenvolveram métodos capazes de resolver as equações do segundo grau, existindo diferentes técnicas e procedimentos intuitivos para a resolução das equações, dado a não formalização algébrica dos povos antigos.

Na Babilônia, os primeiros registros encontrados sobre resolução de equações quadráticas datam de meados de 1700 a.C., feitos em tábuas de argila, cunhadas pela chamada escrita cuneiforme, no estilo retórico (BAUMGART, 1992). Esses registros tinham uma álgebra bem desenvolvida para época e resolviam essas equações por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Segundo Frago (2000), os métodos eram intuitivos e a solução era apresentada como uma “receita matemática”, determinando apenas as raízes positivas.

No Egito, durante escavações no século XVIII, alguns papiros com anotações matemáticas foram encontrados, destacam-se, entre eles, o papiro de Kahun, de Berlim, de Moscou e o Papiro Rhind (ou Ahmes). Pedrosa (2010) afirma que no papiro de Kahun aparece pela primeira vez a solução de uma equação do segundo grau.

Já na Grécia, desenvolve-se a matemática demonstrativa e, nesse contexto, destacam-se os matemáticos Euclides, Pitágoras, Tales de Mileto e Diofanto. Segundo Frago (2000), a dificuldade com tratamento dos números racionais e irracionais e a falta de praticidade do sistema de numeração, levou a civilização ao desenvolvimento de tratamentos geométrico a muitos problemas matemáticos. Há indícios do desenvolvimento, por parte dos pitagóricos, de dois métodos principais para resolver certas equações simples, chamados: método das proporções e o método da aplicação de áreas (EVES, 2011).

Segundo Baumgart (1992), Euclides registrou alguns resultados pitagóricos com o tratamento geométrico. Uma versão ligeiramente simplificada do que conhecemos hoje por $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, era como apresenta a Figura 1.

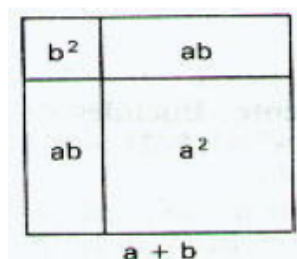


Figura 1: Representação geométrica da expressão $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Fonte: (BAUMGART, 1992,p.7)

Na Índia destacam-se os matemáticos Āryabhata (476 – 550), Brahmaguta (598-665), Sridhara (sec. XI d.C) e Bhaskara de Akaria (1114 – 1185), que tiveram fundamental participação na resolução da equação quadrática. Eles introduziram números negativos nos coeficientes das equações e também o uso do zero. O matemático responsável pela determinação da regra que originou a fórmula atual foi Sridhara.

Segundo Garbi (2009), a ideia da fórmula geral para a solução das equações do 2º grau fundamentou-se na busca de uma nova forma de reduzir o grau da equação por meio da extração de raízes quadradas. A álgebra da antiguidade tinha carácter retórico (forma verbal) sendo essa uma das dificuldades encontradas pelos hindus nas soluções e no tratamento de equações quadráticas.

Em Bagdá muitos matemáticos se dirigiam para o centro científico denominado Casa da Sabedoria. Entre eles o matemático AL-Khowarizmi, que apresentou a resolução da equação de segundo grau pelo método de completar quadrados. Como os números negativos não eram conhecidos na época, então as raízes negativas também não eram. Assim, em alguns casos determinava-se somente uma raiz (SANTANA, 2013).

Na China, destaca-se o matemático Chu Shih-Chieh (1280-1303) que escreveu duas importantes obras. O primeiro deles, escrito em 1299, foi a “Introdução aos estudos matemáticos”, que influenciou fortemente a Coreia e o Japão. O segundo de maior interesse histórico e matemático foi o “Precioso espelho dos quatro elementos”, de 1303 (DROSS, 2009).

Segundo Fragoso (2000), a segunda obra desenvolve uma técnica diferenciada baseada na construção por aproximações sucessivas de raízes de equações de 2º grau denominado de método fan-fan, sendo apresentada de maneira retórica e a unicidade da raiz, a positiva. Contudo, no ano 1819, o matemático inglês William George Horner reivindicou a descoberta desse método e rebatizou de método de Horner.

Na Europa, François Viète (1540 – 1603) e René Descartes (1596 – 1650) destacaram-se por métodos distintos de resolução da equação de segundo grau. Segundo Fragoso (2000), Descartes desenvolveu um método geométrico para obtenção da solução positiva de x e apresentava uma notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade. Seu método resolvia equações quadráticas do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2$ e $x^2 = bx - c^2$, com b e c sempre positivos. Já o método de François Viète consistia numa mudança de variáveis.

Segundo Celestino (2013), a partir da fórmula geral das equações de segundo grau, muitos matemáticos utilizaram os resultados já conhecidos sobre o tema e tentaram generalizar uma fórmula:

- Em 1631, o inglês Willian Outhred publicou a fórmula generalizada da forma que conhecemos e utilizamos até os dias atuais,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- James Sylvester foi o responsável pelo conceito de discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Albert Girard foi quem encontrou relações entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e suas raízes:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 * x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

4 Quem foi Bhaskara

Bhaskara Acharya nasceu na Índia em uma tradicional família de astrólogos. Viveu de 1114 a 1185 dedicando-se à matemática e astronomia. Desde muito cedo teve seus méritos conhecidos, ocupando o posto de diretor do Observatório de Ujjain, o maior centro de pesquisas matemáticas e astronômicas da Índia, na época.

Ao longo de sua vida produziu obras importantes, tais como: Lilavati, Bijaganita e Siddhantasiromani. Essas obras eram relacionadas à aritmética, a álgebra, a equações lineares, quadráticas e a geometria. Bhaskara resolveu e trabalhou com questões de equações considerando que na equação do segundo grau tínhamos como solução duas raízes. Portanto, desenvolveu uma expressão que tinha raízes quadradas e também sabia que a equação $x^2 = 9$ tinha duas soluções, fornecendo a fórmula (ALVES e MACHADO, 2016).

Considerado o matemático mais famoso do século XII, por ter alcançado um nível de entendimento dos sistemas de números e resolução de equações que não havia sido realizado na Europa por vários séculos. Bhaskara estudou trabalhos de Brahmagupta e, portanto, tinha conhecimentos sobre o zero e os números negativos (CELESTINO, 2013).

5 Dedução atual da fórmula

Seja a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0.$$

Dividindo todos os coeficientes por a , $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Subtraindo $\frac{c}{a}$ de ambos os membros da equação, $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

Prosseguindo, faremos com que o lado esquerdo da equação seja um quadrado perfeito e para isto somaremos o quadrado de $\frac{b}{2a}$ a ambos os membros da equação para obter:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Simplificando ambos os lados, obtemos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Extraindo a raiz quadrada de cada membro da equação e lembrando que a raiz quadrada de todo número real não negativo é também não negativa, obtemos duas respostas para a nossa equação:

$$\begin{cases} x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \text{ou} \\ x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{cases}$$

que alguns, por simplificação, escrevem:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Como estamos procurando duas raízes para a equação do segundo grau, deveremos sempre escrever:

$$\begin{cases} x' = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \text{ou} \\ x'' = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{cases}$$

A fórmula ainda pode ser escrita como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

em que Δ é o discriminante da equação do segundo grau, definido por $\Delta = b^2 - 4ac$.

6 Considerações finais

Bhaskara foi um grande matemático, um dos mais importantes de sua época. Ele estudou alguns tipos de equação de segundo grau, desenvolvendo métodos para resolvê-las, porém a elaboração da fórmula geral não foi seu mérito. Sendo assim, para que questões não sejam erroneamente respondidas e o conhecimento seja aprimorado, é preciso que os educadores pesquisem cada vez mais sobre os assuntos e fomentem nos alunos o prazer na pesquisa e descoberta do desenvolvimento matemático, bem como a correção dos falsos conhecimentos.

Sugerimos que o uso da metodologia da história da matemática seja uma ferramenta para que nós, bem como nossos alunos, possamos aprimorar cada vez mais nossos olhares e conhecimentos sobre o passado para desenvolver o futuro.

Referências

- ALVES, Eduardo Freitas; MACHADO, Bianca Brenda Lopes. Uma abordagem histórica da equação do segundo grau. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p.1-12.
- BAUMGART, John K. **Tópico de história da matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992. 112 p.
- BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática do cotidiano, 9º ano**. 1ª ed. Scipione, 2015. 304p.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª ed. Edgard Blucher Ltda 2010. 252 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN): matemática**. Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.
- BRITO, Maritza Camilli Almeida, HEISIG, Welma Oliveira. O uso da história da matemática como recurso didático para desmistificar a "Fórmula de Bhaskara". In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.
- CELESTINO, Kamila Gonçalves. História da Equação do segundo grau em livros didáticos. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba **Anais...** Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-12.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17
- DIAS, Aluizio Ribeiro; LIMA, Cintia Maéle Ferreira de; FREITAS, Edson Gomes. **Uma abordagem nos livros didáticos sobre a fórmula de Bhaskara: mito e realidade**. 2015. 40 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Amapá, Santana, 2015.
- DROSS, Silva Deli. A resolução da equação de segundo grau utilizando o método "completar quadrados". **Cadernos PDE - Programa de desenvolvimento Educacional**, v. 2, p. 1-28, 2009.
- FRAGOSO, Wagner da Cunha. Uma abordagem histórica da equação do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**.v. 43, p. 20-25. 2000.
- GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 243 p.
- GULIN, Amarilda de Cácia, ROSÁRIO, Raimundo Ronilson Leal do. História da matemática e sua contribuição na compreensão do uso cotidiano dessa ciência. **Os desafios da escola**

pública paranaense na perspectiva do professor PDE- Cadernos PDE., v. 01, p. 1-15, 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_artigo_amarilda_de_cacia_gulin.pdf. Acesso em: 29/09/2019.

KATZ, Victor. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LOPES, Lidiane Schimitz, FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, v. 2, n.1, p. 75-88, 2013.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios** - (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 198 p.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. A história da matemática e o processo de ensino aprendizagem. In: XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 2014, Bagé/RS. **Anais...** Bagé/RS: Fundação Universidade Federal do Pampa, 2014. p. 459- 462.

ONAGA, Dulce Satiko. MORI, Iracema. **Matemática - Ideias de desafios**, 9º ano. São Paulo: Saraiva, 18ª ed. 2015. 272 p.

PEDROSO, Hermes Antonio. Uma breve história da equação do 2º grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, v. 2, p. 1-13, 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/122614>>. Acesso: 29/09/2019.

SANTANA, Lidiane Tavares de. **A inserção da história da matemática no ensino da equação do 2º grau**. 2013. 44 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

Modelagem Matemática como instrumento na educação financeira

Mariana Thais Garcia¹

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
mariana.garcia3@unioeste.br

Tiago Emanuel Klüber

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
tiagokluber@gmail.com

Resumo: A Modelagem Matemática na Educação Matemática permite a abordagem de questões do cotidiano em sala de aula, além de assuntos de interesse geral que envolvem diversos conteúdos matemáticos. Dentre eles, emergem aqueles concernentes à Educação Financeira, tema que optamos por realizar uma análise por meio de pesquisa bibliográfica dos relatos de experiência nas últimas cinco edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, CNMEM. Assim, foi necessário organizar e sistematizar essa produção que, por meio de uma Iniciação Científica, buscava responder a interrogação: o que se mostra de Educação Financeira em relatos de experiência de Modelagem Matemática na Educação Matemática, desde as últimas cinco edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, CNMEM (2009 a 2017)? Essa análise permitiu apresentar uma organização e reflexões sobre a articulação entre Educação Financeira em trabalhos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, articulação essa que se dá pela possibilidade de, através da modelagem, tornar a Educação Financeira um tema mais motivador e presente na vida do estudante.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Educação Matemática; Educação Financeira.

1 Modelagem Matemática

A escola tem o importante papel de formar alunos que compreendam a realidade em que vivem e consigam exercer a cidadania em plenitude, tendo presente os problemas que os cercam. Para que isso ocorra é preciso que no processo de ensino e aprendizagem o aluno seja motivado a pensar, questionar, analisar e argumentar. Estes quesitos são geralmente alcançados quando a metodologia utilizada é a Modelagem Matemática, afinal, ela vai muito além de uma metodologia de ensino alternativa e mais eficiente, sendo um fundamento para a motivação do aluno em sala, que, deixando de ser um agente passivo, pode tornar-se um cidadão crítico no processo histórico social da sociedade. Por meio dela, é possível que o aluno tenha uma compreensão da matemática como uma ciência viva, ao invés de uma disciplina desmotivadora, pouco presente em seu dia-a-dia.

¹Bolsista do Programa de Iniciação Científica – PIC – CNPq/CAPES.

A possibilidade de, através da matemática, resolver situações e questionamentos que exijam e promovam autonomia à vida do estudante, tornando-o um indivíduo mais pensante sobre sua realidade, é um aspecto possível de se observar na utilização e desenvolvimento da Modelagem Matemática. Dessa forma, a matemática deixa de parecer uma ciência morta, pronta e acabada, para ser vista como uma estratégia de resolução de problemas do cotidiano. Afinal, foi assim que ela surgiu; da necessidade do homem em resolver determinadas situações-problemas do mundo real. Para Burak et al. (2016, p. 38), a modelagem matemática “[...] satisfaz as necessidades de um ensino da Matemática mais dinâmico, revestido de significado nas ações desenvolvidas, tornando o estudante mais atento, crítico e independente.”

Para Della Nina (2005, p. 36-37),

A Modelagem Matemática é um processo que alia teoria e prática, motivando na busca por entendimento da realidade que o cerca e de meios para agir sobre ela e transformá-la. Dessa forma, ela se torna uma maneira de auxiliar o aluno no papel de cidadão.

Nesse sentido, é possível, por meio da Modelagem Matemática, considerar os erros e tentativas dos alunos para solucionar problemas como pontes para construção do conhecimento, além de instigar a construção de saberes e conhecimentos que fundamentam possíveis transformações da realidade. Na perspectiva de Burak (1992, p. 62), Modelagem Matemática é “[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões”.

Tomando esse cenário de referência em Modelagem Matemática, entende-se que tal metodologia de ensino permite, por sua amplitude, ser utilizada para diferentes faixas etárias e níveis escolares, além de permitir uma proximidade maior com a matemática, podendo corroborar para a uma aprendizagem significativa. Com base nisso, entende-se que a Modelagem Matemática é um excelente recurso em sala de aula, podendo ser utilizada para a aprendizagem de diversos conteúdos necessários a formação de um estudante mais envolvido socialmente, como no caso da educação financeira, como veremos na seguinte seção.

2 Conferência Nacional sobre Modelagem em Educação Matemática

A Modelagem Matemática, conforme o histórico publicado pela Universidade Estadual de Londrina, embora consolidada em nível internacional desde meados do século XX, se fortaleceu no Brasil apenas a partir dos anos de 1990. Ainda assim, esse fortalecimento deu margem à criação de eventos específicos com o intuito de fomentar e aprofundar os debates sobre o tema. Assim, em 1999 foi realizada a I Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática (I CNMEM) promovida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP/Rio Claro com o tema “Modelagem no Ensino de Matemática”.

Esse encontro, considerado como a primeira iniciativa de reunir os envolvidos com a

pesquisa em Modelagem e Educação Matemática no Brasil, permitiu a instauração de um espaço próprio de discussão sobre o tema. Desde então, a cada dois anos a conferência vem sendo realizada, com relatos de experiência, comunicações científicas e pôsteres, tratando de temas diversificados e interdisciplinares.

No presente artigo, trataremos sobre a educação financeira no Brasil, tendo como base alguns relatos de experiência que apresentam esse tema, na CNMEM de 2009 a 2017. Em todos os trabalhos apresentados foi possível perceber que a Modelagem instiga nos alunos o gosto por aprender Matemática e fazerem perguntas ao invés de apenas se conformarem com o que lhes é dito, contudo, de 162 artigos revisados da categoria “relatos de experiência”, 37 foram tomados para uma análise mais profunda, por abordar educação financeira.

3 Educação Financeira

De acordo com o decreto presidencial 7.397/2010, que institui a ENEF (Estratégia Nacional de Educação Financeira), o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF – tem o intuito de promover a educação financeira e previdenciária, auxiliando o cidadão na tomada de decisões mais conscientes sobre a administração de seu capital. Seu objetivo é contribuir para o fortalecimento da cidadania, fornecendo e apoiando ações que ajudam a realizar escolhas com mais autonomia e discernimento.

Para elucidar a diferença entre Educação Financeira e Matemática Financeira, podemos citar Chiarello (2014), que argumenta que a discussão sobre Educação Financeira vai além de questões referentes à poupança e ao saber lidar com os produtos financeiros, precisando envolver, dentre outros, as relações da sociedade com o capitalismo, o consumismo e o consumo. Em outras palavras, os relatos de experiência desenvolvidos englobando a Educação Financeira traziam também uma enorme diversidade de conhecimentos, possibilitando o estudo de vários conteúdos, majoritariamente envolvendo problemas presentes no cotidiano do aluno e da comunidade em que ele está inserido.

Segundo D’Aquino (2008), o processo de educação financeira infantil abrange quatro áreas: “como ganhar”, “como poupar”, “como gastar” e “como doar”. Para Ramos e Santos (2016), é muito importante que as crianças tenham conhecimento dessas áreas para que eles possam ter uma vida financeira saudável. Além disso, tais autoras ressaltam o atraso do Brasil nessa área, já que alguns países como Estados Unidos, Reino Unido, Austrália, Espanha e Nova Zelândia já realizam, há vários anos, o processo de educação financeira da sua população, principalmente com crianças e jovens. Esses países perceberam a importância do tema e, por conta disso, vêm desenvolvendo de forma mais intensa alguns programas (SANTANA et al., 2007).

Ademais, nesses países, e outros desenvolvidos, a educação financeira é, tradicionalmente, dada pelas próprias famílias, sendo que as escolas têm a função de reforçar e ampliar a formação que o aluno adquire em casa. Entretanto, no Brasil, geralmente, a temática educação financeira não é parte do universo educacional familiar e nem escolar, afinal, poucas pessoas estão

preparadas para discuti-la (DETONI; LIMA, 2011).

4 Educação Financeira na CNMEM

Dada a necessidade da abordagem do tema, discuti-lo em sala de aula é muito importante, promovendo estudantes mais responsáveis e preocupados com a situação econômica do país. Assim, podemos tomar alguns relatos presentes na CNMEM como exemplo.

Em 2009, Almeida relatou sua experiência com Modelagem em uma turma de Ensino Fundamental II, com “A contribuição da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem”. O objetivo era ensinar os alunos a fazer um controle do gado leiteiro e decidir quais produtos derivados de leite eram mais lucrativos, trabalhando com noções de estatísticas, economia, administração da própria propriedade, porcentagem, tabelas, gráficos, etc. Por ser uma abordagem presente no cotidiano dos alunos, isso os ofereceu a oportunidade de desenvolver propostas para apresentar aos seus pais, buscando aumentar a renda mensal de suas próprias famílias.

Já em 2011 foi relatada a “Investigação sobre possibilidades de economizar água no cotidiano de alunos Belorizontinos: uma experiência com Modelagem Matemática” (ROQUE; CAMPOS, 2011), no qual as professoras do Ensino Fundamental I contam que pediram à turma que levassem as contas de água de suas residências para que tivessem conscientização da necessidade de reduzir o consumo excessivo de água e que compreendessem o modelo utilizado pela COPASA para calcular o valor da conta, ou seja, como o consumo em litros é transformado no custo em reais. Os conhecimentos mobilizados pelos alunos para responder às questões variaram entre: regra de três, proporcionalidade, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros e decimais.

Também, em 2015, Aguiar e Basso trataram sobre a “Modelagem Matemática no Ensino Integral”, abordando, a partir da sugestão dos alunos, qual combustível, entre gasolina ou álcool, tem melhor custo-benefício. Esses relatos citados retratam temas presentes no cotidiano dos alunos, e provocam, muitas vezes, uma mudança em suas perspectivas, tornando-o mais preparado para tomar decisões.

Além disso, conjuntamente a educação financeira, há a possibilidade de trazer outros conteúdos necessários a formação do estudante. Isso é uma característica da Modelagem Matemática, que embora vista como uma metodologia mais “demorada”, causando receio em muitos professores, ela pode ser utilizada para ensinar diversos conteúdos ao mesmo tempo. Assim, muitos relatos encontrados traziam conhecimento de função/equação, além de operações básicas, regra de três e estatística. Entretanto, pudemos observar que, mesmo o tema sendo relacionado a finanças, apenas um entre os 37 relatos trazia o ensino de matemática financeira em si.

Conclusões

Diante de diversas pesquisas relacionadas ao tema, acreditamos que a Modelagem Matemática, como metodologia de ensino, é muito mais conveniente para a educação financeira, principalmente se comparada ao ensino tradicional, metodologia majoritariamente utilizada no Brasil. Contudo, o analfabetismo financeiro é uma dificuldade encarada no mundo inteiro. Prova disso foi o estudo realizado em 2015 sobre literacia financeira pela S&P Global Financial Literacy Survey, que aponta dois em cada três adultos no mundo como analfabetos financeiros, sendo distribuído de forma heterogênea, com variações entre grupos e países. Portanto, como afirmam Somavilla e Bassoi (2016), a educação financeira na escola é essencial, visto que bons hábitos adquiridos desde cedo podem contribuir para tomada de decisões adequadas quanto à gestão financeira durante a vida toda.

Dessa forma, encontra-se na matemática, quando vista de forma modeladora, o amparo para a dificuldade enfrentada pela economia e outras questões sociais de grande relevância no dia-a-dia. Afinal, como afirma Barbosa (2003), “aqueles que não se sentem à vontade com a matemática podem simplesmente aceitar o argumento do outro”.

Agradecimentos

Agradeço ao meu professor e orientador Tiago Emanuel Klübler, que durante todo o período de Iniciação Científica esteve me ensinando mais sobre pesquisa, me apoiando e me auxiliando em todas as minhas dificuldades. Agradeço também aos meus familiares e amigos que sempre me incentivaram durante toda a caminhada.

Referências

- AEF Brasil. **Quem somos** - ENEF. 2017 Disponível em:
<<http://www.vidaedinheiro.gov.br/quemsomos/>>. Acesso em: 22 ago. 2018.
- AGUIAR, M. B.; BASSO, M. V. A. Modelagem Matemática no ensino integral. In: **Anais da 9ª Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. São Carlos. 2015.
- ALMEIDA, V. H. A contribuição da Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem. In: **Anais da 6ª Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. Londrina. 2009.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BASSOI, T. S.; SOMAVILLA, A. S. A Literacia financeira: cenário e perspectivas. **BoEM**. Joinville. 2016.

BURAK, D., ARAGÃO, R. M. R. de. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**. Curitiba: CRV, 2012.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999. Cap. 6.

KLÜBER, T. E. Formação de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática: questões emergentes. 2017. **Educere et Educare**, n.12, p. 1-11.

ROQUE, A. C. C., CAMPOS, I. S. Investigação sobre possibilidades de economizar água no cotidiano de alunos Belorizontinos: uma experiência com Modelagem Matemática. In: **Anais da 7ª Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. Belém. 2011.

SANTOS, L. T. B., PESSOA, C. A. S. Educação financeira na perspectiva da educação matemática crítica: uma reflexão teórica à luz dos ambientes de aprendizagem de Ole Skovsmose. **BoEM**. Joinville. 2016.

Assessoria de Comunicação Social (Org.). **Ensino de educação financeira é importante para desenvolvimento de crianças e adolescentes**. 2017. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/58211-ensino-deeducacao-financeira-e-importante-para-desenvolvimento-de-criancas-eadolescentes>>. Acesso em: 10 set. 2018.

UEL. **Histórico CNMEM**. 2009. Disponível em: <<http://www.uel.br/eventos/cnmem/historico.htm>>. Acesso em: 20 ago. 2018.

X CNMEM. **Educação Matemática na Educação Brasileira: história, atualidades e projeções**. 2017. Disponível em: <<https://uem2017.wixsite.com/xcnmem>>. Acesso em: 30 set. 2018.

Uma articulação entre Modelos Matemáticos e a Educação Matemática Crítica

Henrique Zanelatto
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
henrique_zanlatto@outlook.com

Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná- UNIOESTE
tiagokluber@gmail.com

Resumo: O presente trabalho traz os resultados finais de uma monografia que, por meio de uma pesquisa bibliográfica, teve como intuito discutir e estabelecer relações entre a Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica nas IX e X edições da Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). Inicialmente foi realizado o levantamento dos relatos experiência publicados nas duas edições do evento e selecionados os que apresentavam modelos matemáticos. Após, destacamos elementos que consideramos pertinentes à pesquisa, em planilhas eletrônicas e agrupamos segundo similaridades, guiados pela interrogação: “Os modelos presentes em artigos publicados nas IX e X CNMEM, permitem que tipo de articulação à Educação Matemática Crítica?”. Foram selecionados 55 relatos de experiência que trouxeram em seu texto os modelos matemáticos utilizados nas atividades de modelagem matemática. Na fase da análise na íntegra dos relatos de experiência nos restringimos a observar os que eram voltados à Educação Básica, ou seja, Ensino Fundamental II e Ensino Médio, dos quais totalizaram 24 artigos. Destacamos elementos que acreditamos ser relevantes à interrogação e observamos que em alguns dos relatos foi possível perceber articulações entre os conceitos de matemacia e diálogo no grupo de estudantes que proporciona a democratização dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Modelos Matemáticos; Análise de Artigos; Educação Crítica.

Introdução

Este artigo apresenta os resultados finais de um trabalho de conclusão da disciplina de Monografia apresentada como requisito parcial para aprovação. O tema partiu do interesse do primeiro autor durante os estudos das disciplinas de Educação Matemática, que compõem o curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), em parceria com o segundo autor. A interrogação que conduziu a pesquisa foi: “*Os modelos presentes em artigos publicados nas IX e X CNMEM permitem que tipo de articulação à Educação Matemática Crítica?*”.

Consideramos que a CNMEM é um evento importante da linha da Modelagem Matemática seja pelo grande número de publicações nessa área, seja por reunir muitos pesquisadores da comunidade científica. Visando à nossa interrogação, acreditamos que os modelos

matemáticos presentes nessas edições do evento contribuem na compreensão do que se tem circulado na comunidade científica a respeito da modelagem matemática.

A Educação Matemática Crítica permite um diálogo com o aspecto formativo de um cidadão crítico, de acordo com o que é recomendado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), envolvendo conceitos para além dos conteúdos matemáticos, contribuindo para a prática de cidadania.

Dessa forma, organizamos o artigo com uma breve revisão teórica sobre Modelagem Matemática, modelos matemáticos e Educação Matemática Crítica. Em seguida, estão os aspectos metodológicos, as discussões, os resultados e as considerações finais. Após as referências bibliográficas, apresentamos o apêndice A, que contém os trabalhos analisados e sua codificação.

Revisão Teórica

A Modelagem Matemática, como é apontada pela literatura, tem diversos entendimentos do termo. (BARBOSA, 2001; BIEMBENGUT e HEIN, 2003; KLÜBER e BURAK, 2008; BASSANEZI, 2011; ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012). Para Biembengut e Hein (2003, p. 11) modelagem é “um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento” ou ainda, é o processo que “envolve a obtenção de um modelo” (p. 12).

Enquanto para Bassanezi (2011, p. 16) “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” e descreve modelo matemático como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”.

Já para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) “a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos”. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13), também afirmam que Modelo Matemático se configura como “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema”. Dentre outros entendimentos da Modelagem Matemática que podem ser observados na literatura supracitada.

No que diz respeito aos modelos matemáticos, em geral, aparecem com o intuito de generalizar, descrever e/ou explicar uma problemática em questão, desta maneira encontramos diversas formas que se apropriam do conceito de Modelo, assumindo-o como uma representação da situação/fenômeno. Com essas características é possível observar que os modelos matemáticos apresentam

pelo menos três maneiras de se entender os modelos: 1- Modelos já prontos; 2 – modelos matemáticos construídos para a resolução dos problemas; e, 3 – modelos não matemáticos. Dessa forma, uma lista de supermercado pode ajudar a tomar decisões e a fazer previsões (KLÜBER, 2016, p. 44).

Do mesmo modo que a Modelagem Matemática apresenta uma pluralidade de entendimentos, os modelos matemáticos partilham desse fato sobre sua compreensão e, é uma etapa

fundamental do processo de Modelagem Matemática.

Desta forma, Bassanezi (2011, p. 25) entende que a obtenção de um Modelo Matemático pressupõe “a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa”.

Para Klüber (2016), a obtenção do modelo matemático consiste na habilidade de, por meio de ferramentas matemáticas, aproximar uma situação-problema e, por meio dos resultados obtidos, interpretar a solução e, assim, validar o modelo, caso seja apropriado a circunstância proposta.

A validação do modelo matemático é outra etapa que, segundo Almeida e Vertuan (2014, p. 5), “implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação”. O que consiste em avaliar se o que está sendo proposto pelo modelo está adequado com a problemática inicial e viabiliza uma possibilidade de resolução satisfatória.

A Matemática pode ser observada em muitos fenômenos e áreas do conhecimento, observando um comportamento crítico da Matemática, Borba e Skovsmose (1997), demonstram uma interessante percepção de criticar a ideia de que “os números não mentem”, no sentido de argumentar quantitativamente para tomada de decisões, atribuindo uma função descritiva a Matemática, relacionando a essa característica o poder da matemática, criando um sistema de crenças, mitos e falsas regras sobre ela. Desta forma, uma pessoa que não possua conhecimento de determinado assunto em matemática, pode concebê-la como precisa e completa. Isso reforça a necessidade do caráter crítico diante da ação da matemática estar permeada em diferentes meios e contextos, fazendo uso dela para retirar conclusões.

Com respeito à Educação Matemática Crítica, diferentes resultados podem ser obtidos de grupos diferentes de pessoas, pois devemos considerar a individualidade de experiências de cada sujeito. O trabalho com o interesse e a realidade do aluno é, na maioria das vezes, muito proveitoso de se fazer, entretanto devemos tratar de assuntos que venham a potencializar as competências e técnicas matemáticas necessárias para o avanço de seus estudos.

Nesse contexto, Skovsmose (2014) aborda a ideia de *matemacia* que pode ser entendida como a competência em lidar com técnicas matemáticas e lidar com suas aplicações, sendo o sujeito capaz de entender o mundo por meio de números e gráficos, e ainda saber descrevê-lo adequadamente.

A inclusão de fatos que aconteceram, ou acontecem, a valorização cultural que o público encontra e a necessidade de pessoas capacitadas para exercer sua cidadania, são aspectos que a Educação Matemática Crítica aborda, e para isso, requer a familiarização com diversos problemas que auxiliem o indivíduo a perceber as funções sociais, econômicas, culturais, políticas, ambientais, educacionais e outras possíveis.

Nesse sentido, os problemas que são propostos em sala de aula podem seguir três tipos de referências: matemática pura, semirrealidade e realidade. Essas referências servem de base

para a resolução e investigação de problemas (SKOVSMOSE, 2000), auxiliando, possibilitando e exercendo, em algumas das situações, os aspectos críticos da educação. O quadro seguinte, Quadro 1, representa melhor tais cenários que os problemas propostos em sala de aula podem assumir.

Quadro 1: Cenários dos problemas

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: (SKOVSMOSE, 2000, p. 8).

Atraindo nosso foco para a representação da realidade temos uma alternativa na representação de fenômenos, a Modelagem Matemática que, segundo Skovsmose (2007), podemos abordar o mundo empírico através de modelos. A representação é boa se o modelo descreve o episódio real e a representação é ruim se o contrário ocorre. A representação do mundo empírico torna-se grande aliada para esse procedimento a tecnologia, com potencial e precisão para representação do problema real, em certas situações.

Aspectos metodológicos

Para a realização desta pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico dos relatos de experiência publicados nas IX e X CNMEMs, com o intuito de responder à interrogação: “*Os modelos presentes em artigos publicados nas IX e X CNMEM permitem que tipo de articulação à Educação Matemática Crítica?*”

Para isso, realizamos a leitura prévia dos relatos de experiência e selecionamos os que apresentavam modelos matemáticos. Nessa primeira etapa foram obtidos 55 relatos. Já realizada a seleção, optamos por trabalhar com os relatos de experiência do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, que totalizaram 24 artigos.

Para destacar os elementos que consideramos pertinentes à pesquisa utilizamos a ferramenta *Google Formulários* e organizamos as informações extraídas, em planilhas eletrônicas, para a realização das análises.

Atribuímos aos relatos códigos alfanuméricos que são constituídos por uma letra e um número, agrupados em espaçamento. Os artigos com a letra A, representam a IX edição da CNMEM, enquanto os artigos com a letra B, representam a X edição da CNMEM. Quanto ao número, está associado com a ordem de seleção durante a leitura prévia, sem 1 o primeiro selecionado da edição, 2 o segundo e assim sucessivamente. No quadro disponível no Apêndice A estão as referências dos artigos selecionados, e também a codificação.

Discussões e resultados

Após a seleção dos relatos de experiência retomamos a leitura destacando os seguintes aspectos:

- Descrição do tema;
- O “modelo” apresentado;
- Conteúdos matemáticos;
- O tipo de discussão suscitada pelo modelo.

A seguir, estão organizadas em tabelas os aspectos acima destacados:

Quadro 2: Descrição dos temas

Descrição dos temas		
Tema	Trabalho referenciado	Ocorrências
Ambientais	A1, B9, B12	3
Finanças	A3, A7, B1, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10, B11, B14, B15	14
Tecnológico	A8, B13	2
Construção/Planejamento	B16, B15, B14, B12, A5, A1	6
Ludicidade	A4, B14	2

Fonte: Os autores.

Sobre a descrição dos temas, foram agrupados de acordo com similaridades que apresentavam, e é possível observar que eles são bem diversificados e possuem uma tendência em se trabalhar modelagem matemática atrelada ao tema de finanças. Ainda é possível observar que a parte de construção/planejamento foram os temas mais trabalhados nas duas edições.

No que diz respeito aos modelos matemáticos dos relatos de experiência, foram organizados de acordo com a representação identificada no relato, conforme segue no Quadro 3.

Quadro 3: O “modelo” apresentado

O “modelo” apresentado		
“Modelo”	Trabalho referenciado	Ocorrências
Diversos	A4, B6	2
Tabular e/ou gráfico	A7, A8, B1, B2, B3, B5, B7, B8, B9, B10, B11, B13, B14	13
Geométricos	A1, A2, A5, A6, A8, B2, B12, B15, B16	9
Algébricos	A7, A8, B1, B2, B5, B7, B9, B12	8
Aritméticos	A7, A8, B1, B2, B3, B5, B7, B9, B12	9

Fonte: Os autores.

As atividades de Modelagem Matemática proporcionam diversas representações a algumas problemáticas, como ocorre na subcategoria Diversos, nela estão agrupados os relatos que descrevem com mais de uma representação os fenômenos tratados, é possível observar que é uma minoria. A tendência geral apresentada é a de representar situações por gráficos e/ou tabelas, e houveram ocorrências medianas sobre representações Geométricas, Algébricas e Aritméticas.

A seguir, estão organizados os relatos de acordo com os conteúdos matemáticos utilizados na resolução do problema inicial.

Quadro 4: Conteúdos matemáticos

Conteúdos matemáticos		
Conteúdo	Trabalho referenciado	Ocorrências
Geometria	A1, A2, A4, A5, A6, B12, B14, B15, B16	9
Matemática Financeira	A7, B1, B4, B15	4
Tratamento da Informação	A4, A5, A7, B3, B7, B9, B10	7
Funções, equações e inequações	A4, A7, A8, B1, B2, B5, B7, B9, B10	9
Proporcionalidade	B3, B6, B8	3
Trigonometria	A4, B16	2
Análise Combinatória	A4	1

Fonte: Os autores.

Observando a tabela, percebemos que houve uma tendência maior em se trabalhar com os assuntos de geometria e, Funções, equações e inequações. Houve diversos assuntos matemáticos que foram contemplados nos modelos matemáticos. Alguns relatos continham mais de um conteúdo matemático, estando presentes em diferentes subcategorias.

No Quadro 5 estão organizadas as discussões realizadas pelo modelo matemático que, em alguns relatos, os estudantes tiveram a oportunidade de discutir sobre os assuntos destacados.

Quadro 5: Discussão suscitada pelo modelo

O tipo de discussão suscitada pelo modelo		
Discussão	Trabalho referenciado	Ocorrências
Não consta	A1, A2, A4, A6, A8, B1, B13, B14, B15, B16	10
Uso consciente do dinheiro e economia	A3, B4, B5, B6, B7, B8	6
Sustentabilidade	A5, A7, B11, B12	4
Contaminação, doenças e saúde	B9	1
Salário mínimo	B10, B3	2
Erros de medição e erros experimentais	B2	1

Fonte: Os autores.

Houve um grupo volumoso de artigos que não relatou se houve uma discussão sobre

o tema em questão, enquanto a estrutura do artigo se restringiu a esclarecer a atividade de modelagem matemática e o modelo matemático.

Durante a tarefa de modelagem matemática, relatada nos artigos, surgiram assuntos que abordam a tomada de decisões em relação ao consumo consciente, após traçado o modelo, tanto alunos quanto professor debatiam sobre o problema inicial e conjecturavam ideias para resolver o problema e inferir sobre outras situações cotidianas, como relatado em A3, B4, B5, B6, B7 e B8.

Nos trabalhos A5, A7, B11 e B12, o modelo proporcionou discutir sobre práticas sustentáveis e rentáveis, pois, para a elaboração do modelo os alunos deveriam ter em mente o uso de recursos naturais e o retorno a curto prazo do investimento, com isso, alguns estudantes puderam observar que tais práticas são muito úteis e possíveis de se instaurar em suas casas. Nos trabalhos B10 e B3, que possuíam no tema uma abordagem ao salário mínimo, durante a elaboração do modelo, a projeção gráfica do modelo auxiliou na observação da estagnação do valor do salário mínimo. Ao realizar os cálculos puderam perceber, que o salário mínimo possui um ajuste insuficiente, o qual não atende adequadamente ao cenário em que o relato foi publicado.

Ainda sobre *o tipo de discussão suscitada pelo modelo*, o trabalho B9, aborda a taxa de contaminação viral e proliferação das fêmeas do mosquito transmissor do vírus da dengue. Com o modelo os alunos puderam observar que a contaminação segue ordem exponencial, revelando a importância da prevenção e interrupção do ciclo reprodutivo do mosquito. O trabalho B2 traz, por meio de uma experimentação, a comparação com teoria, estipulando projeções dos resultados a serem obtidos na Lei de Hooke, ao construir o modelo por meio de aproximações e ajustes de curvas, obtiveram valores muito próximos à teoria, proporcionando entre os alunos que uma discussão sobre os erros de experimentação e aproximações a teoria, além de promover a experimentação que é muito enriquecedora nas aulas de matemática.

Nas discussões supracitadas, os alunos foram incentivados a adotar uma postura reflexiva sobre a situação, auxiliando no desenvolvimento de competências críticas, sejam no caso que é proposta pela vivência do aluno ou na qual as implicações sociais agem como norteadoras das ações. Juntamente com o professor proporcionaram um ambiente em que houve a presença de elementos de um currículo crítico, no qual as duas partes, discente e docente, estavam envolvidas por meio do diálogo que democratiza as relações com a vida cotidiana. As diferentes discussões que surgiram colaboraram com a formação dos alunos, dando-lhes a possibilidade de compreender um pouco mais os fenômenos da esfera social, econômica, ambiental, familiar, tecnológica, entre outras, de acordo com as atividades propostas.

Considerações finais

Na busca de dar respostas à interrogação que desencadeou essa pesquisa, foram revisados artigos e livros que assumem importância no que diz respeito ao escopo da investigação. No que concerne à descrição dos temas que os artigos revelaram, observamos que a prática de Modelagem

Matemática na Educação Básica, Ensino Fundamental II e Médio, apresentou maior interesse em abordar situações que envolviam finanças. Outros temas também apareceram com menor frequência, porém não menos importantes, como tópicos ambientais, tecnológicos, construção e planejamento e ludicidade.

Revelando que a prática de atividades de Modelagem Matemática está cumprindo o papel de trabalhar com o cotidiano, colaborando assim para o desenvolvimento de competências críticas que os estudantes usam de vivências ou relações com o meio para desenvolvê-las.

Ao tratar dos modelos apresentados nos relatos de experiência, verificamos que a pluralidade assumida reforça a importância de não se trabalhar a matemática apenas como tópicos isolados, mas sim relacioná-la a conteúdos já estudados, o que apresentou ser o foco principal dos trabalhos, associar os conteúdos já estudados com outros e com a realidade. Relacionando com o caráter descritivo que a Matemática assume na representação de fenômenos.

Observamos que as discussões matemáticas que emergiram nos relatos, expuseram essa prática e o diálogo entre professor e alunos foi pautado em estabelecer relações entre o fenômeno e a Matemática. Os conteúdos matemáticos que os relatos apresentaram em maior número foram geometria e funções, equações ou inequações, contribuindo para a introdução e o desenvolvimento de tais assuntos aplicados à realidade.

Sobre o foco da pesquisa, os artigos observados, apresentaram articulações com a Educação Matemática Crítica, em relação ao conceito de *matemacia*, no que concerne ao indivíduo poder agir e representar o mundo ao redor por meio da matemática, tal aspecto se torna presente com a modelagem de fenômenos que estão no nosso meio. Relaciona-se ao desenvolvimento de competências críticas, sendo que os estudantes reconhecem a importância da matemática e do trabalho que ela desempenha na vida dos estudantes.

Ao desenvolver a pesquisa o esclarecimento mais rigoroso dos procedimentos que uma pesquisa no campo da Educação Matemática possui, se deu pelo envolvimento, avanço e leitura ocorridos durante o processo, juntamente com a parceria estabelecida com o segundo autor desse artigo. Ao observar tais considerações, a pertinência da abordagem da Modelagem Matemática no trabalho de formação de um cidadão crítico é sustentada no que diz respeito à interação com realidade, e também pela característica descritiva que um modelo possui.

Conferências analisadas

CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2015, São Carlos- Sp. CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PLURALIDADES E DEBATES. São Carlos- Sp: Sbem, 2015. 1 v.

CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2017, Maringá- PR . CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: HISTÓRIAS, ATUALIDADES E PROJEÇÕES. Maringá-

PR: Sbem, 2017. 10 v.

Referências bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: <<http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 28 jun 2019.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.(a)

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM.(b)

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed., 3ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. The ideology of certainty in mathematics education. **For the learning for mathematics**, Kingston, v. 17, n. 3, p. 17-23, nov. 1997

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais**. Londrina: UEL, 2004. p. 1-10. CD-ROM.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009. Disponível em:<<https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37940>>. Acesso em: 16 maio 2018

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

KLÜBER, T. E. (Des) Encontros entre a modelagem matemática na Educação Matemática e a Formação de Professores de Matemática. **Alexandria**, v. 5, n. 1, p. 63-84, maio 2012

KLÜBER, T. E. Aspectos relativos à noção de prática (s) de modelagem matemática na educação matemática. **Revemat- Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, SC, v. 8, n. 4, p.92-103, jun. 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p92>>. Acesso em: 20 jun. 2018.

KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: **Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. 2ª ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. p. 41 – 58.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. **Concepções de modelagem matemática**: contribuições teóricas. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 1, p.17-34, 2008. Anual. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1642>>. Acesso em: 18 out 2018.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro - SP, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus, 2014.

Apêndice A

A1	RAMOS, D. C.; COSTA, L. M.; ALMEIDA, L.M. W. A CRIATIVIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos-SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015.
A2	MARTINS, D.A.; ARAÚJO, M. D. MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: EXPERIÊNCIA SOBRE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
A3	SANTANA, E. S.; SILVA, J. N. D. MODELAGEM MATEMÁTICA: O CASO DO RESTAURANTE UNIVERSITÁRIO DA UEFS. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos-SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
A4	VIEIRA, G.; THIEL, A. A.. A MATEMÁTICA NO BASQUETEBOL. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
A5	LITTIG, J.; LORENZONI, L. L.; REZENDE, O. L. T. MODELAGEM MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO REFLEXIVO: UM ESTUDO SOBRE A CAPTAÇÃO DA ÁGUA DA CHUVA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
A6	CHAVES, M. I. A. GEOMETRIA NO CÁLCULO DE VOLUME DE FRUTAS. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015

A7	AGUIAR, M. B; BASSO, M. V. A. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO INTEGRAL. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
A8	SANT'ANA, M. F.; SANT'ANA, A. A.; SERPA, P. B. S. UMA EXPERIÊNCIA DE MODELAGEM GEOMÉTRICA ORIENTADA POR UMA PROFESSORA QUESTIONADORA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015, São Carlos- SP. Anais... . São Carlos-SP: Sbem, 2015
B1	PINHEIRO, R. M.; SILVA; E. R. S.; SILVA, K. A. P. TEORIA E PRÁTICA QUE SE ENTRELACAM EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B2	DIAS, C. M.; SANTOS, M. L.; NASCIMENTO, P. J. S. COMPREENDENDO O CONCEITO DE ERRO: UM EXPERIMENTO PRÁTICO PELA LEI DE HOOKE. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B3	CARARO, E. F. F.; CARARO, L. E.; SANTOS, M. W. S. O PODER DE COMPRA DO SALÁRIO MÍNIMO: MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B4	MARTINS, O. J. B.; LOVATO, J. L. M. C. MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA POSSIBILIDADE DE NAVEGAÇÃO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B5	ALVES, E. N.; REZENDE, O. L. T.; LORENZONI, L. L. MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B6	CAMELO, F. J.; VANEGAS, D. M.; GALVIS, L. T. ALZA EM LAS TARIFAS DEL TRANSPORTE PÚBLICO BOGOTÁ: UM PRETEXTO PARA EXPLORAR AMBIENTES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B7	REHFELDH, M. J. H.; NEIDE, I. G.; KÖING, R. I. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO POSSIBILIDADE DE AUXÍLIO NA TOMADA DE DECISÕES. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.

B8	CARVALHO, F. J. R.; MUTTI, G. S. L.; MARTINS, S. R. EMBALAGEM ECONÔMICA OU ARMADILHA DO VAREJO? RELATANDO UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B9	COSTA, W. O. DISCUTINDO A REPRODUÇÃO DO MOSQUITO AEGYPTI POR MEIO DE UMA TAREFA DE MODELAGEM MATEMÁTICA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B10	MARTINS, D. A.; ARAÚJO, J. L. A. O PLANEJAMENTO DA OFICINA #OCUPAICEX: PRÁTICAS COLABORATIVAS DE UM GRUPO DE MODELAGEM. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B11	PALMA, R. M.; VERTUAN, R. E.; SILVA, K. A. P. MODELAGEM MATEMÁTICA E UMA AÇÃO RELACIONADA AO EMPREENDEDORISMO: NEGOCIANDO O PREÇO DE SANDUÍCHES NATURAIS. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B12	CARMO, D. S.; NETO, S. D.; SILVA, D. F. CONSTRUÇÃO DE UM PROJETO DE CAPTAÇÃO DA ÁGUA DA CHUVA POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B13	GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P. A BATERIA ACABOU E AGORA? UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM NO 7º ANO. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B14	NIRO, K. L. A UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL COMO ALTERNATIVA PEDAGÓGICA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B15	TAVARES, C. H.; OLIVEIRA, W. P. UMA EXPERIÊNCIA COM A MODELAGEM MATEMÁTICA NA PRÁTICA DE ENSINO E ESTÁGIO SUPERVISIONADO. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.
B16	GAJIKO, T. C. O PROBLEMA DO ESTACIONAMENTO DA ESCOLA. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2017, Maringá- PR. Anais... . Maringá-PR: Sbem, 2017.

Análise da produção escrita dos alunos em um primeiro contato com a disciplina de Cálculo I

Pamela Gonçalves
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE)
pangoncalves@gmail.com

Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE)
andbciani@gmail.com

Resumo: Este trabalho se propõe a analisar a produção escrita de trinta e oito estudantes, obtidas por meio de uma tarefa intitulada “testes de verificação”. Este artigo traz a primeira questão desta disciplina que é ofertada no Ensino superior e os alunos estão matriculados na disciplina de Cálculo I¹, ofertada em 2019 pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, *campus* Cascavel-PR. Na perspectiva da avaliação da aprendizagem, a análise da produção escrita é considerada uma abordagem para extrair informações independente de certo ou errado, obtidos nas correções de questões. Por meio de cada produção escrita e apoiados em Bardin (2011), inferimos uma possível interpretação se o aluno realizou e compreendeu o enunciado da questão, se adotou a estratégia correta de resolução, se realizou a resolução da questão e se errou ou se equivocou com o que a questão solicitava. Para isso utilizamos a leitura horizontal dos trabalhos, isto é, analisamos a primeira questão de todos os trabalhos realizados na ocasião. Como principal resultado, acreditamos que o fato de um aluno não fazer uso um determinado caminho para resolver o problema não garante que ele desconheça o conteúdo trabalhado.

Palavras-chave: Análise da Produção Escrita; Ensino de Cálculo; Ensino, Aprendizagem e Avaliação de Matemática.

Introdução

A avaliação pode ser considerada como uma prática de investigação para o ensino e para a aprendizagem, podendo servir para interpretar a aprendizagem e redirecionar o ensino, além de se configurar em uma oportunidade de aprendizagem. Estas perspectivas retiram o foco do rendimento e da classificação, alinhando a avaliação à aprendizagem. Desta forma, este trabalho se insere na perspectiva da avaliação da (para a) aprendizagem.

A análise da produção escrita se configura como uma forma de efetivar uma avaliação da/para a aprendizagem. Neste primeiro artigo, consideramos a análise da produção escrita como forma escolhida de realizar uma avaliação para a aprendizagem, mais especificamente a utilizamos para uma avaliação diagnóstica inicial.

¹O título da disciplina citado na ementa é Cálculo Diferencial e Integral I, para fins textuais utilizaremos apenas Cálculo I para nos referenciarmos à ela.

A seguir apresentamos algumas considerações a respeito dessa perspectiva de utilização da análise da produção escrita no ensino de Matemática para a gestão das aulas de cálculo I, provenientes de investigação teórica, realizada a partir dos estudos de Souza e Buriasco (2008), Ciani (2012), Pires e Buriasco (2012) e Pires (2013), e prática, que envolvem a produção escrita de um trabalho diagnóstico avaliativo realizado em uma turma da disciplina de Cálculo I. Estas considerações surgiram em meio as discussões do grupo de pesquisa GEEPAAM – Grupo de Estudos e Pesquisa em Avaliação e Aprendizagem da Matemática.

A avaliação em sala de aula, muitas vezes, reflete uma visão de avaliação técnica, embasada simplesmente “no certo ou errado; no aprovado ou reprovado; no bem-sucedido ou malsucedido” (SOUZA e BURIASCO, 2008, p.12), ou ainda, segundo Souza e Buriasco (2008, p.12), se “o aluno desenvolve uma estratégia diferente daquela ensinada em sala de aula, [...] e sua resposta fica equivocada, toda a resolução é considerada errada”. Neste trabalho propomos que a produção escrita, principalmente em situações de avaliação, seja analisada objetivando buscar uma compreensão do conhecimento que os alunos exibem nas situações (SILVA; SANTOS, 2018).

Apresentaremos considerações a respeito da análise da produção escrita em matemática a respeito da dinâmica da aula segundo essa perspectiva de trabalho, uma vez que os critérios avaliativos resultam em pontuações ou conceitos que equalizam o conhecimento do aluno.

Na perspectiva de estratégia de avaliação, a análise da produção escrita não visa à atribuição de uma nota ou um conceito, e sim à obtenção de informações que possibilitem uma tomada de consciência do ocorrido nos processos de ensino e de aprendizagem do aluno. Além disso, propicia e orienta para uma tomada de decisão visando auxiliar tanto professor quanto aos alunos a organizar e orientar seus estudos.

A opção dessa disciplina, vem ao encontro aos dados fornecidos por instituições de ensino superior, que apresentam um grande número de alunos retidos nessa disciplina (ROSA, 2019). Nesse ensino, o objetivo deste artigo é investigar possibilidades da análise da produção escrita em uma turma de alunos da disciplina de Cálculo I. Produzimos nossos dados a partir de análises de questões de um trabalho diagnóstico avaliativo intitulado “teste de verificação”, visando entender como que os alunos lidam como conhecimentos matemáticos do Ensino Médio que serão necessários para um avanço nos conteúdos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Engenharia Agrícola².

Análise da produção escrita em Matemática como estratégia de ensino

A análise da produção escrita pode ser utilizada para mediar a condução das aulas de Matemática (CIANI, 2012; PIRES, 2013). Trata-se de uma estratégia de ensino, devido ao

²Os dados sobre as avaliações foram colhidas no ano de 2015, no primeiro ano do curso de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, *campus* de Cascavel.

respeito às ações previamente planejadas ou decisões tomadas pelo professor que lhe proporcionarão obter informações sobre o conhecimento dos alunos. Estas informações podem orientar a condução do trabalho em sala de aula.

Dessa forma, a análise da produção escrita pode ser vista como estratégia de ensino para auxiliar o professor na obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem, uma vez que, essas informações, poderão subsidiar o processo de elaboração de intervenções (CIANI, 2012; PIRES, 2013) visando possibilitar autonomia ao aluno, no sentido de se apropriar do conteúdo matemático.

Além disso, a análise da produção escrita do aluno “busca identificar quais foram os problemas resolvidos nas produções escritas, o que se pode matematizar a partir deles e o que se pode fazer a partir da resolução já apresentada pelo resolvidor” (CIANI, 2012, p. 67). Neste viés, tal técnica, traz consigo a ideia de análise da produção escrita como estratégia de avaliação, visto que a análise da produção escrita, promove ao professor uma visão dos processos de aprendizagens dos alunos (CIANI, 2012).

Procedimentos metodológicos

Inicialmente realizamos leituras de investigações desenvolvidas por autores que analisaram a produção escrita de alunos. Essas leituras, proporcionaram informações referentes à análise da produção escrita em matemática, sinalizando particularidades que fossem significativas para a realização da análise da produção escrita e como ela pode ser realizada.

Para a realização desta investigação, que proporcionou a exposição das considerações neste trabalho, utilizamos as orientações metodológicas presentes na Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011), que possibilita o uso de diferentes técnicas de organização e análise dos dados. O *corpus* para a pesquisa é constituído de 38 documentos, e tais documentos são compostos de quatro questões relacionadas ao conteúdo de funções, para este trabalho, foi selecionado a análise da primeira questão.

Nossas leituras são classificadas como “leitura horizontal”, esta classificação é mencionada no artigo de Santos e Buriasco (2015, p. 130), o qual a define como a “leitura das produções de todos os alunos em uma mesma questão ou problema”. Outrossim, destaca que esta leitura, proporciona vislumbrar semelhanças entre as produções dos alunos, e por consequência, auxilia a identificar procedimentos de resolução mais utilizados, além de analisar os acertos e erros mais recorrentes (SANTOS; BURIASCO, 2015).

Realizamos agrupamentos considerando as informações obtidas na produção escrita dos testes. Produzimos quatro agrupamentos: estratégia e procedimento correto; estratégia correta e erro de procedimento; procedimentos não realizados e procedimentos errados. Cada agrupamento gerou uma categoria de análise, respectivamente: Questões corretas; Estratégias corretas; Não realizado e Ausência de estratégias ou Estratégia e procedimentos incorretos.

Para Ciani (2012) uma ação de intervenção por parte dos professores somente é exequível

quando há a existência da produção escrita do aluno. Destarte, o registro escrito do aluno é fundamental para que a análise e a intervenção possam acontecer. Desse modo, podemos considerar a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino em que a produção escrita é uma fonte de informações que pode ser meneado pelo professor a fim de que possa atingir seus objetivos de ensino.

Análise da produção escrita nos “Testes de Verificação”

Analisar produções escritas em Matemática é também uma estratégia para professores de Matemática conhecerem aspectos que envolvem os processos de produções de significados de alunos (SILVA; SANTOS, 2018). Ainda segundo os autores, as possibilidades de leituras da produção escrita construídas pelos alunos em suas resoluções, são de muita relevância para o trabalho pedagógico dos professores.

Nesse viés, Ciani (2012) destaca que uma das principais relevâncias do trabalho é a busca em conhecer a complexidade e heterogeneidade oriundas da produção escrita dos alunos, respeitando as vivências e idiossincrasias de cada indivíduo.

Em relação à dinâmica da aula, segundo Santos e Buriasco (2015) é possível considerar duas possibilidades, que devem ser entendidas como sugestões de trabalhos e não como formas rígidas para as aulas. À saber: Possibilidade um, considerada a partir do trabalho de Ciani (2012):

- i) O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita.
- ii) O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução.
- iii) Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor elabora intervenções, sob a forma de uma trajetória de ensino e aprendizagem, de modo que essas possam auxiliá-lo a guiar o aluno na reinvenção.
- iv) O professor traz para sala de aula informações acerca da produção do aluno para que esse possa analisá-las e as discutir com os colegas.
- v) Tendo em vista as informações do professor, o aluno segue em seu processo de matematização, buscando desenvolver suas ferramentas matemáticas.
- vi) O professor guia o aluno, tendo como referência a trajetória de ensino e aprendizagem elaborada, até entender que esse conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas ou que conseguiu discutir aspectos matemáticos subjacentes a resolução apresentada (SANTOS; BURIASCO, 2015, p. 131).

Possibilidade dois, considerada a partir do trabalho de Pires (2013):

i) O aluno resolve uma tarefa apresentando sua produção escrita. ii) O professor recolhe a resolução do aluno e realiza uma análise da produção presente nessa resolução. iii) Com base nas informações obtidas na análise realizada, o professor intervém no trabalho do aluno por meio de comentários escritos na resolução apresentada, pedindo justificativas e/ou esclarecimentos. Inicia-se, assim, um processo de comunicação por escrito com o aluno. iv) O aluno recebe sua resolução, agora com os comentários do professor, e busca refletir sobre sua resolução e tenta explicar, por meio de sua produção escrita, o que fez, para dar continuidade em seu trabalho. v) O professor recolhe novamente a produção do aluno e realiza outra análise. Caso o aluno já tenha desenvolvido ferramentas matemáticas ou discutido aspectos matemáticos subjacentes a resolução apresentada a reinvenção guiada é finalizada. Caso contrário, o professor novamente intervém no trabalho do aluno por meio de comentários registrados na resolução desse, pedindo justificativas e/ou esclarecimentos. vi) Novamente de posse de sua resolução e de outros comentários e/ou questionamentos do professor, o aluno retoma sua atividade. vii) Esse processo repete-se até o professor entender que o aluno conseguiu desenvolver suas ferramentas matemáticas ou que conseguiu discutir aspectos matemáticos subjacentes a resolução apresentada (SANTOS; BURIASCO, 2015, p. 131).

Analisando a primeira possibilidade de dinâmica de aula, em relação ao papel do professor e ao papel do aluno, podemos dizer que o papel do professor reside em levantar as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisá-las, sistematizá-las no intuito de identificar semelhanças e equívocos nessas produções. Tais relações podem ser utilizadas para elaborar uma trajetória de ensino e aprendizagem que possa auxiliar o professor a orientar os alunos a desenvolver suas próprias estratégias matemáticas. Já o papel do aluno diz respeito a resolver tarefas apresentando sua produção escrita para que o professor possa analisá-la, e assim, continuar em seu processo de aprendizagem (SANTOS; BURIASCO, 2008).

A segunda possibilidade, apresenta que o papel do professor diz respeito a recolher as produções dos alunos quando da resolução de uma tarefa, analisá-las de modo que possa elaborar comentários ou questionamentos que os auxiliem a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Inicialmente, o papel do aluno reside em resolver uma tarefa sem nenhuma indicação do professor, e, em seguida, com os comentários feitos por ele, refletir sobre sua resolução e tentar explicar o que fez, buscando desenvolver suas resoluções iniciais, aprimorando-as (SANTOS; BURIASCO, 2008).

A primeira questão da tarefa intitulada “Testes de Verificação” tem como enunciado o que segue, extraído de Stewart (2014, p. XXIV).

$$\text{Seja } h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} . \text{ Esboce o gráfico de } h.$$

Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos.

Com base nas informações anteriores, apresentamos nas figuras a seguir a descrição e análise interpretativa das produções escritas dos estudantes para a primeira questão, bem como as respectivas inferências emergidas e os agrupamentos indicativos das categorias.

Alunos	Descrição objetiva da questão	Resposta esperada	Inferências	Agrupamento	Categoria
T1 a T9	Questão 1: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de h	Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos	A produção escrita mostra que o estudante compreendeu o enunciado	Estratégia e procedimentos corretos	Corretos

Tabela 1: Categoria “corretos”. Fonte: as autoras

Alunos	Descrição objetiva da questão	Resposta esperada	Inferências	Agrupamento	Categoria
T25 a T34	Questão 1: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de h	Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos	A produção escrita mostra que o estudante compreendeu o enunciado, calculou os pontos, mas não conseguir visualizar o gráfico em sua forma completa, considerando os intervalos abertos e fechados	Estratégia correta. Erros de procedimento: Construção do gráfico	Estratégia correta

Tabela 2: Categoria “Estratégia correta”. Fonte: as autoras

Alunos	T35; T36		T37; T38; T13	
Descrição objetiva da questão	Questão 1: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de h			
Resposta esperada	Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos			
Inferências	A produção escrita mostra que o aluno não compreendeu os conceitos de intervalos abertos e fechados em uma função. A escrita revela uma interseção inexistente criada pelo aluno		A produção escrita mostra que o aluno não compreendeu os conceitos de intervalos abertos e fechados em uma função. O esboço do gráfico não condiz com a lei de formação da função	
Agrupamento	Estratégia correta. Erros de procedimento: Construção do gráfico			
Categoria	Estratégia correta			

Tabela 3: Categoria “Estratégia correta”. Fonte: as autoras

Alunos	T10 a T12 e T14 a T17
Descrição objetiva da questão	Questão 1: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de h
Resposta esperada	Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos
Inferências	Produção escrita inexistente ou insuficiente
Agrupamento	Procedimentos não realizados. Ausência de estratégias
Categoria	Não realizado

Tabela 4: Categoria “Não realizado”. Fonte: as autoras

Alunos	T18; T20	T19	T21	T22	T23	T24
Descrição objetiva da questão	Questão 1: Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de h					
Resposta esperada	Espera-se que o aluno produza um esboço do gráfico de $h(x)$. Apresente conhecimentos sobre intervalos					
Inferências	A produção escrita revela a obtenção das raízes, o esboço do plano cartesiano, mas não há registro de outros pontos e nem a construção do gráfico.	A produção escrita revela a obtenção de um ponto, mas não há o esboço do plano cartesiano, registro de outros pontos e nem a construção do gráfico.	A produção escrita mostra os sinais de parte de $h(x)$, não há o esboço do plano cartesiano o registro de outros pontos e nem a construção do gráfico.	A produção escrita revela a obtenção das raízes e o esboço do plano cartesiano. No entanto apresenta dois esboços de gráficos para $h(x)$, ambos incorretos.	A produção escrita revela a obtenção de pontos e o esboço do plano cartesiano. No entanto apresenta o esboço do gráfico de $h(x)$, como duas retas. Marcação incorreta de pontos no plano cartesiano.	A produção escrita revela a obtenção de pontos, mas não há o esboço do plano cartesiano.
Agrupamento	Ausência de estratégias. Estratégia e procedimentos incorretos					
Categoria	Errados					

Tabela 5: Categoria “Errados”. Fonte: as autoras

A análise da produção escrita das resoluções dos alunos mostra que, de um total de trinta e oito alunos, nove alunos chegaram à resposta correta, quinze apresentaram uma estratégia correta, indicando que compreendem o que o enunciado propõe, porém nem todos conseguiram aplicar o conceito para resolver corretamente a questão. Os demais, oito deles, não realizaram o exercício, e seis forneceram indícios em suas produções que já vivenciaram o conceito em algum momento, mas não sabiam como aplicar na resolução do exercício. Questões adversas que impedem o aluno de realizar a atividade, foram desconsideradas nesta análise. A conclusão obtida é que a maior dificuldade dos alunos não estava em conhecer o conceito ou na sua

compreensão, mas sim em procedimentos de construção do plano cartesiano e as indicações das coordenadas.

Observamos ainda que dos oito estudantes que não realizaram a atividade, não apresentaram nem um esboço de alguma resolução da questão, simplesmente estava em branco. Ainda, dos dez alunos que mostraram ter uma estratégia correta, falharam na junção entre as duas funções.

Algumas Considerações

Ao considerarmos que, segundo Santos (2014), a análise da produção escrita é uma forma de obter informações sobre processos de ensino e de aprendizagem sob uma perspectiva de prática de avaliação e de oportunidade de aprendizagem, as informações oriundas dela, podem dar novo sentido ao processo pedagógico.

Nesse sentido, a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino, centrada na produção escrita, pode ser utilizada pelo professor como fonte de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de cálculo I de modo a subsidiar o processo de elaboração de possíveis intervenções, intencionando que o aluno seja autor do próprio conhecimento.

Percebemos que, os resultados obtidos nas análises, nos dá fundamentação para notar as fragilidades de aprendizado de cada estudante sobre determinados conteúdos, uma vez que focamos o olhar na produção escrita de cada aluno, buscando compreender como foi o raciocínio para gerar o registro por nós obtidos.

Reforçamos que esse trabalho não teve (e não tem) a pretensão de apontar ou ressaltar limitações na condução das aulas de Cálculo I, mas sim, de representar como a produção escrita do aluno pode ser vista como um diagnóstico sobre a aprendizagem dele. Nesse sentido, limites e possibilidades da análise da produção escrita como estratégia de ensino podem (e devem) se constituir em objeto de estudo de futuras investigações.

Referências

- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 3 ed. São Paulo: Edições 70, 2011.
- CIANI, Andréia Büttner. O realístico em questões não-rotineiras de matemática. 2012. 160 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.
- PIRES, Magna Natália Marin. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e educação matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.
- PIRES, Magna Natalia Marin; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Prova em fases: instrumento para aprender. In: V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação

Matemática, 2012, Petrópolis. **Anais...** Petrópolis, 2012, p. 1-17.

ROSA, Chaiane Medeiros de. AVARENGA, Karly, Barbosa. SANTOS, FABIANO Fortunato Teixeira dos. Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e integral: Um estudo de Caso. Revista **Inter. Educ. Sup.** Campinas, SP, v. 5, p 1-16, 2019.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SANTOS, Edilaine Regina; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Estudo da Produção Escrita de Alunos do Ensino Médio em uma Questão Não Rotineira de Matemática. **Unión:** Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n° 24, p. 103-115, 2010.

SANTOS, João Ricardo Viola dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. Zetetiké Campinas, v. 16, n. 30, p.11-43, jul. 2008.

SANTOS, Edilaine Regina dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita em matemática como uma estratégia de ensino: algumas considerações. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 17, n. 1, p.119-136, jul. 2015.

SILVA, Darlysson Wesley da; SANTOS, João Ricardo Viola dos. Possibilidades da análise da produção escrita em um grupo de trabalho com professores de matemática. Instrumento, Juiz de Fora, v. 20, n. 2, p.195-374, jul. 2018.

STEWART, James. **Cálculo.** 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Um relato de experiência: da teoria à prática no ensino de matrizes.

Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE
amarildo.vicente@gmail.com

Laís Dri da Rosa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE
laisdridarosa@hotmail.com

Mariana da Rosa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE
marianabernartt@hotmail.com

Resumo: Este trabalho constitui-se de um relato de experiência acerca do ensino da operação multiplicação de matrizes, a partir de dois problemas. Um visando o uso da metodologia Resolução de Problemas e, o outro, uma situação problema a qual os alunos pesquisaram os preços de alguns produtos básicos de consumo, além de organizar e "criar" um modelo para os dados coletados. Tais atividades foram realizadas ao decorrer do Estágio Supervisionado II do curso de Matemática Campus-Cascavel, no ano letivo de 2019, em duas turmas de 2º ano do ensino médio, no estágio obrigatório. À luz deste contexto, são apresentadas algumas relações observadas acerca da escolha, desenvolvimento e resultados das atividades, observando algumas divergências entre a teoria, expectativas e a prática no desenvolvimento do estágio.

Palavras-chave: Estágio obrigatório; Multiplicação de matrizes.

1 Introdução

Para muitos acadêmicos do curso de matemática, o primeiro contato com a docência acontece na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, a qual no curso da Unioeste - Cascavel, ocorre no terceiro ano.

As expectativas em relação à sala de aula e à eficácia das metodologias de ensino e aprendizagem adotadas são sempre positivas, porém, nem sempre essas expectativas são alcançadas na prática. Já dizia Karnal (2012) em seu livro, *Conversas com um jovem professor*,

Você cuidou de tudo. Planejou, acalmou-se, estudou. A aula é sobre algo fascinante. Eis que... não deu certo. Os alunos não gostaram, o conteúdo não avançou e você terminou o dia pensando se ser professor é de fato o que você deseja. Saiba: Isso é bem mais comum do que você imagina. (KARNAL, 2012, p. 24).

A realidade de sala de aula, não é diferente.

Nesse trabalho são relatadas duas atividades realizadas no Colégio Estadual Horácio Ribeiro dos Reis, em duas turmas de 2º anos, por meio do estágio Supervisionado II, da disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Matemática, do 4º ano de licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, referentes ao conteúdo de matrizes. O desenvolvimento das atividades tiveram a duração de 3 horas-aula cada.

Num primeiro momento, expõe-se a motivação do uso de metodologias alternativas à tradicional, e em seguida, é apresentada uma breve descrição das atividades que foram realizadas, bem como o resultado do desenvolvimento das atividades e conclusões tiradas dessa experiência.

2 Algumas metodologias

Em geral a matemática escolar é vista, pelos alunos, como algo que foge à sua compreensão, sem utilidades práticas, além do aprender para a prova, provocando um aspecto de inutilidade da mesma. Tais concepções estão aliadas ao modo que a matemática é ensinada.

Quais metodologias devem ser adotadas, e quais recursos devem ser utilizados para trabalhar determinado conteúdo, são algumas das preocupações essenciais no planejamento de qualquer aula.

2.1 Tradicional

A metodologia de ensino tradicional é a que prevalece atualmente no ensino, e também a que recebe muitas críticas, as quais estão atreladas às concepções dos docentes regentes da matéria de matemática. Em geral a matemática é encarada como um conhecimento cristalizado e acabado, não apenas pelos alunos, mas pelos professores. Como afirma Miguel (2005), os problemas estão em os educadores terem

[...] sido educados de modo a conceber a Matemática como coisa pronta, os professores têm dificuldades para vê-la como coisa em processo de construção e, por extensão, para a implementação dessas ações no contexto de sala de aula. É uma mudança de atitude e postura que demanda tempo e formação contínua. (MIGUEL, 2005, p. 386).

Essa mudança de postura vem sendo incentivada nos cursos de formações de professores, e em documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nos quais sugerem o uso de metodologias diversificadas, em especial as tendências em educação matemática.

O ensino tradicional é realizado de modo sistemático, dando ênfase ao rigor matemático e a memorização. Este processo ocorre por meio de aulas expositivas, de modo que os alunos são expostos a um ensino mecanicista.

Este processo é caracterizado pela introdução de uma operação ou conceito novo pelo professor, passando pela apresentação do conceito, das propriedades do algoritmo, e ao final é proposto uma série de problemas de operação à fórmula ou o procedimento matemático traba-

lhado, deixando de ser valorizado os conhecimentos prévios dos alunos. Segundo Miguel (2005), daí, advém as diversas críticas à matemática, pois, quando ensinada rigorosamente, em sua grande maioria, transmite a ideia de que é composta apenas de fórmulas e algoritmos, os quais servem apenas para resolverem problemas ideais e rotineiros do ensino básico.

É importante que ocorra uma variação de metodologias para que possa atender às necessidades dos mais diversos alunos quanto à aprendizagem. Allevato (2011) defende o uso de Resolução de Problemas, justificando que é necessário dar significado a matemática, visto que

[...] os PCN indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para, se fazer matemática na sala de aula; tornam claro o papel da Matemática no Ensino, sugerindo objetivos que evidenciem a importância de o aluno valorizá-la como instrumento para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (ALLEVATO, 2011, p. 26).

Além disso, a matemática não tem claro o seu papel de ensino na escola tradicional. O fracasso desse ensino é evidente nas mais diversas avaliações, como o SAEP¹, o qual demonstra o baixo aprendizado da matemática. Diante desse cenário, e das exigências da sociedade, é necessário que o aluno seja ativo e pensante, e não mais apenas um receptor. Oferecer estímulos e criatividade no ensino é dever do educador, para que assim, permita que o aluno aprenda matemática de forma mais dinâmica e voltada para o educando como “ator principal”. Segundo Paz Júnior (2008),

[...] é preciso lembrar que a atitude educativa autêntica não consiste somente dos problemas pedagógicos e sim encontrar a melhor solução possível, em presença dos diferentes fatores encontrados na matemática, pois confiam-nos os alunos e somos responsáveis pela sua educação, trairíamos a nossa função humana, se não nos esforçássemos por explorar ao máximo as possibilidades que cada indivíduo tem em si. (JUNIOR PAZ, 2008, n.p.)

À luz do que já foi discutido, são descritas na próxima seção parte das atividades desenvolvidas durante o estágio.

2.2 Resolução de problemas

Ao se trabalhar com a metodologia resolução de problemas, surge a dificuldade de formular problemas adequados, pois este necessita que seja interessante, para que o aluno queira resolvê-lo, e ao mesmo tempo, que apresente um nível de dificuldade adequada, não fácil de mais, pois se o aluno sabe resolver imediatamente há um problema, mas não difícil de mais, ao ponto do aluno perder o interesse.

Segundo Butts (1997), há cinco subconjuntos de problemas matemáticos: Exercícios de reconhecimento, Exercícios algorítmicos, Problemas de aplicação, Problemas de pesquisa aberta e Situações-problemas.

¹O SAEP (Sistema de Avaliação da Educação Básica do Paraná) se configura como uma importante política pública de avaliação da educação, capaz de monitorar a qualidade do ensino e da aprendizagem.

Sendo exercícios de reconhecimento, os utilizados para reconhecer ou recordar conceitos, definições ou teoremas. Exercícios algorítmicos trata-se de exercícios que possuem uma resolução passo a passo, que se utiliza de procedimentos conhecidos, pré-determinados. Problemas de aplicação, esse é o tipo de problema em que os enunciados não dão estratégias para a resolução, onde se encaixa os clássicos “Prove que...”. Situações-problema, esse subconjunto é constituído por situações das quais os estudantes deverão identificar o problema e encontrar o método adequado para solucioná-lo.

Tendo em vista que Schoenfeld (1991) traz, que os alunos veem os problemas de matemática, apenas como exercícios de prática, não esperando que façam sentido. Sendo estes tratados em sua maioria desconexos com a realidade, enunciados como calcule, e resolva constituem a maior gama de problemas abordados nas escola.

Foi utilizado situações problemas, no qual objetiva-se introduzir um novo conceito, como será abordado na próxima seção.

2.3 Modelagem

Neste trabalho é tratado a modelagem matemática pode por meio de um encaminhamento geral para o uso desta metodologia, a qual pode ser descrita pelos seguintes passos: tema; questionamentos; coleta de dados; sistematização; e conclusões, não seguindo essa sequência necessariamente. Em cada um destes passos, o que se altera é a participação do professor e o papel do aluno, visto que o professor sempre é mediador desse processo. Assim o trabalho com modelagem matemática pode ser descrita em “três modelos principais”, o que Barbosa (2003) classifica como: caso 1, caso 2 e caso 3.

A Figura 1 ilustra os três casos e o papel do professor e alunos em cada um dos casos.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 1: Quadro comparativo dos casos de Modelagem

Fonte: Barbosa (2003).

Logo no caso 1, o ambiente proposto é direcionado e simples, pois a tarefa proposta é curta, além de que, o professor fornece o problema e os dados, o papel do aluno é interpretar,

relacionar e investigar para chegar a conclusões sobre a questão posta.

O caso 2, o aluno é responsável pela coleta de dados. Nesse caso o aluno tem mais responsabilidade, devido a necessidade de análise e coleta de informações pertinentes para o desenvolvimento da tarefa.

E não menos importante, o caso 3, é um modelo mais aberto, o que difere do caso 2, é que nesse o aluno pode ser responsável por escolher o tema e a questão que deseja trabalhar.

À luz dos casos de modelagem apresentados, a atividade 2 apresentada na próxima seção, pode ser enquadrada no caso 2.

3 As atividades

Durante a prática foram utilizados elementos das metodologias de ensino e aprendizagem Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, tais como: começar os conteúdos por meio de situações problemas para introduzir operações entre matrizes (soma, subtração e multiplicação por escalar) utilizar de elementos reais do cotidiano dos alunos para introduzir o conceito de matriz e trabalhar a operação de multiplicação de matrizes.

A seguir é apresentado uma breve descrição de situações problemas utilizadas para introduzir multiplicação de matrizes. A primeira atividade foi proposta para uma turma de segundo ano que será aqui denominada por x, e a outra foi realizada com outro segundo ano o qual será detonada por y.

Atividade 1 - Visto que os alunos acompanham futebol, foram utilizados os resultados do Campeonato Paranaense de 2019 de futebol masculino, até a data de 14 de abril de 2019. Sendo construídas as Tabelas 1 e 2, a primeira correspondente aos resultados obtidos pelos times mais conhecidos pelos alunos, e a segunda correspondente a pontuação de cada um dos três resultados possíveis.

Tabela 1: Resultados obtidos pelos times

	Vitória	Empate	Derrota
Coritiba	5	5	1
FC Cascavel	4	3	4
Foz	1	3	7
Londrina	5	4	2

Fonte: Acervo dos autores

Pontos obtidos por resultado:

Tabela 2: Pontuação

	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Fonte: Acervos dos autores

Foi solicitado aos alunos que obtivessem a pontuação de cada equipe após o 11º jogo, sendo esperado que os alunos obtivessem a Tabela 3.

Tabela 3: Resultados

	Pontos
Coritiba	20
FC Cascavel	15
Foz	6
Londrina	19

Fonte: Acervo dos autores

Em seguida, foi explicitado no quadro as operações realizadas para obter a Tabela 3, com o objetivo de introduzir a multiplicação de matrizes e dar significado à “nova operação”.

Atividade 2 - Foi solicitado em uma aula anterior para que os alunos pesquisassem o preço do kg do pão francês, do queijo e do litro de leite. Assim, pedimos para que os alunos formassem grupos de 3 a 4 alunos, de modo que cada grupo tivesse pesquisado o preço dos produtos descritos anteriormente. Como previsto, alguns grupos não haviam realizado a breve pesquisa. Então, foram fornecidos alguns preços dos produtos para esses alunos, para que respondessem o questionário abaixo.

Suponha que o seu grupo consuma cinco litros de leite, dois kg de pão e um kg e meio de queijo em uma semana. Responda o que se pede.

- Qual o total gasto pelo seu grupo com esses produtos em uma semana?
- Qual o total gasto por integrante do grupo?
- Qual o valor gasto no mercado em um mês?
- Escreva a matriz dos preços, em reais, dos produtos.
- Escreva a matriz da quantidade de alimentos consumidos em uma matriz coluna.
- Escreva a matriz correspondente ao gasto.

g) Interpretar o significado da matriz resultante.

A Atividade 1 é uma situação em que os alunos têm pouca participação “no trabalho”, pois são fornecidos todos os dados já organizados, sendo solicitado apenas que os alunos relacionem as duas tabelas de forma a obter uma terceira, não sendo necessário nenhum conhecimento prévio de multiplicação de matrizes. Apenas de interpretação dos dados.

Tal atividade pode ser caracterizada como um problema fechado, o qual o único papel do aluno é interpretar e juntar os dados para obter uma resposta. Além disso, há apenas um caminho de resolução, não sendo um desafio, ou necessariamente um problema que o aluno queira, sinta vontade de resolver, mas é um problema o qual o discente sabe resolver.

Diante do exposto, justifica-se que a escolha da atividade 1 para a Turma x, foi devida a problemas de colaboração dos alunos. Os discentes eram muito agitados e pouco interessados nos conteúdos abordados. Também era esperado que os alunos tivessem interesse pela atividade, devido ao gosto pelo futebol.

A opção da Atividade 2 na Turma y é devida aos alunos serem mais interessados e comprometidos com as aulas. Esta atividade é uma situação na qual os educandos devem coletar as informações. Pode-se caracterizar essa situação, segundo Barbosa (2003), como um caso de modelagem, pois aos alunos é fornecido apenas o problema, cabendo aos mesmos a coleta de dados e a investigação. O papel do professor neste caso se limita a orientar o desenvolvimento da atividade.

4 Desenvolvimento das atividades e comentários

O desenvolvimento da primeira situação ocorreu sem muitas dificuldades. No momento de transição do problema para a formalização do conteúdo, observou-se que os alunos compreenderam como a operação era realizada e entenderam o sentido de realizá-la.

Já a segunda atividade foi mais conturbada. Os alunos se dispersaram bastante em sua realização, e tiveram dificuldades em escolher o modo que deveriam ser organizadas as matrizes (questionavam, por exemplo, se deveriam escrever a matriz correspondente aos preços como uma matriz linha ou como uma matriz coluna).

No início da aula, na qual foi formalizada a multiplicação de matrizes com os alunos, pediu-se para que dois grupos fossem ao quadro e colocassem suas respostas para que fosse possível discutir, mas apenas um grupo havia feito. Diante disso, foram discutidas as conclusões obtidas por esse grupo com os demais alunos. Também discutiu-se os preços dos produtos coletados pelos alunos, levantando algumas hipóteses para o preço do pão francês ser mais alto em um supermercado grande, em relação a um supermercado pequeno. Da mesma forma foi discutido o preço dos outros produtos.

Essa atividade não ocorreu da maneira esperada, entre alguns dos motivos para isto, pode ser citado o fato da abordagem metodológica escolhida ser diferente da que os alunos estão

acostumados, a metodologia tradicional. Foi observado que os alunos tiveram pouca “autonomia” no desenvolvimento das atividades propostas, esperando que fosse passado os passos a seguir para o desenvolvimento da atividade. Porém, mostraram-se bastante motivados com a coleta de dados e apesar do desenvolvimento da Atividade 2 não ter saído como esperado, foi válida para o desenvolvimento do senso crítico desses alunos.

Algumas considerações

Outras atividades com um caráter diferente do ensino tradicional foram realizadas para introduzir o conceito de matriz e trabalhar a operação de multiplicação de matrizes. Foram trabalhados ainda, com exercícios algorítmicos e de reconhecimento até problemas de aplicação.

Em relação à operação de multiplicação de matrizes, os alunos das duas turmas foram expostos desde exercícios com enunciado do tipo “realize a multiplicação dessas duas matrizes”, e problemas mais conceituais envolvendo a ordem das matrizes, até problemas que deveriam ser interpretado o significado da multiplicação de matrizes em questões envolvendo uma semi-realidade.

Apesar da Atividade 1 ter sido desenvolvida, na Turma x, sem muitos problemas e os alunos não apresentarem dificuldades na compreensão da operação de multiplicação de matrizes, essa turma apresentou um baixo desenvolvimento na realização dos exercícios e problemas, quando comparados aos alunos da Turma y, na qual a Atividade 2 não ocorreu como previsto.

A prática mostrou que mesmo planejando aulas levando em consideração as características e dificuldades apresentadas por cada turma, isto não garante que a aprendizagem vai ocorrer, como exposto neste trabalho, não se tem garantias de qual abordagem será a mais adequada, já que os alunos aprendem de modos diferentes, além disso, cada aula é única e está cercada de fatores imprevisíveis que fogem do controle do professor, pois a escola é um ambiente dinâmico.

O educador deve estar preparado para contornar as situações que são postas no ambiente escolar, mesmo que imprevisíveis, para isto é necessário que o professor esteja apto a responder as necessidades de seus alunos, conhecendo as metodologias e abordagens que melhor se adequam aos obstáculos presentes na prática docente, para que a conexão entre o que é ensinado e o que é aprendido ocorra da melhor maneira possível.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G.; PRADO, M. A. O ensino e aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas. **Acta Scientiae**, Canos, v.12, n.1, p 24-42, jan/jul.2010.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003. Disponível em:
<http://www.uricer.edu.br/rperspectiva/inicio.php?id_numero=26.06>. Acesso em: 12 jul.

2019.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BUTTS, Thomas. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

KARNAL, L. **Conversas com um jovem professor**. São Paulo: Contexto, 2012.

MIGUEL, J. C. **O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**. In: PINHO, S. Z. de; SAGLIETTI, J. R. C. (Org.). Núcleos de Ensino – PROGRAD – UNESP. São Paulo: Editora UNESP, 2005. v.1. p.375-394.

PAZ JÚNIOR, G. T. **As dificuldades no ensino de matemática**. 2008. Disponível em: <<https://www.webartigos.com/artigos/as-dificuldades-no-ensino-de-matematica/5488/>>. Acesso em: 21 jul. 2019.

A primeira experiência com jogos: Dominó de Funções e Dominó das Proporções

Eduarda Pereira de Assis
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
dudahhassis98@gmail.com

Natalia Cristina Araújo Taques
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
natalia-cristina10@hotmail.com

Resumo: Neste artigo apresentamos uma breve exposição sobre a utilização de jogos no ensino de Matemática, trazendo uma experiência com o Dominó de Funções e com o Dominó de Proporções. O primeiro destes, referente às funções, resultou da adaptação de um jogo similar e o segundo, referente às proporções, foi elaborado por nós. Ambos se configuram como propostas de ensino baseadas na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Descrevemos uma aplicação desta adaptação, de cada um dos jogos de dominós, realizada por nós, sendo uma na disciplina de Tendências em Educação Matemática e a outra no PROMAT. Baseadas nessas experiências de aplicações, trazemos alguns resultados e sugestões para futuras aplicações.

Palavras-chave: Jogos no ensino de Matemática; Dominó de Funções; Dominó de Proporções; Registros de Representação Semiótica.

1 Introdução

A ideia deste artigo surgiu a partir da nossa primeira experiência de regência em Matemática por meio do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – PROMAT, que tem como público alvo alunos matriculados no Ensino Médio. Ministrar aulas no PROMAT é parte integrante da disciplina de Estágio Supervisionado I, da qual nós, autoras, somos alunas.

Durante a execução do PROMAT, fomos buscar algo que articulasse o conhecimento acadêmico com o conhecimento escolar do assunto de Regra Fundamental das Proporções, popularmente conhecida como Regra de Três. Assim, idealizamos o Dominó das Proporções, inspiradas pelo outro jogo descrito neste artigo, o Dominó das Funções. Este último jogo conhecemos por pesquisa realizada na disciplina de Tendências em Educação Matemática, na qual tivemos uma primeira experiência com o ensino de Matemática a partir dos jogos. Buscamos por jogos tradicionais, como é o caso do dominó, que pudessem se adaptar ao conteúdo matemático. Dessa busca, encontramos o Dominó das Funções, que aborda o conteúdo das funções de primeiro grau, levando em conta a perspectiva de trabalho com os registros de representação semiótica de uma função de primeiro grau. No PROMAT, o jogo de dominó foi reformulado para se trabalhar o conteúdo da Propriedade Fundamental das Proporções, também apoiado na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica.

No artigo fazemos um breve estudo referente à utilização de materiais manipuláveis e jogos em sala de aula, pois o jogo é um caso particular de material manipulável, refletindo sobre aspectos positivos e os desafios do ensino de Matemática por meio desses materiais. De nossa primeira experiência no ensino de Matemática com este tipo de material, de alguma reflexão e fundamentação, trazemos breves sugestões de aprimoramento, com o cuidado de sempre preservar o aspecto de jogo do material.

2 Materiais manipuláveis e jogos no ensino de Matemática

O uso de jogos e materiais manipuláveis em sala de aula complementam o ensino tradicional baseado apenas no quadro, giz e livro didático, trazendo um aspecto mais prático e lúdico, principalmente para aulas de um assunto tão abstrato quanto a Matemática. Ainda, segundo Smole *et al* (2008), esses recursos implicam numa mudança significativa no ensino e na aprendizagem de Matemática, modificando o método centrado nos livros didáticos e nos exercícios padronizados, possibilitando uma interação maior entre os alunos, os docentes e o material abordado, podendo tornar o ambiente de compreensão dos conteúdos da disciplina mais leve e acessível.

Um dos empecilhos encontrados quando se trata de utilizar material manipulável no ambiente educacional, em particular do jogo, é a resistência dos próprios professores. Muitas vezes, isso ocorre devido à falta de conhecimento sobre a utilização do material ou à falta de condições adequadas de trabalho. Referente às últimas, citamos aqui as classes superlotadas, a falta desses materiais, os curtos tempos das aulas e de preparação e a grande quantidade de conteúdo a ser vencido em um curto período de tempo.

Segundo Smole *et al* (2008), de uma maneira geral, o sistema educativo ainda oferece resistência à utilização de jogos no ensino de Matemática devido a uma crença enraizada de que a Matemática é uma disciplina envolta por uma aura de seriedade, enquanto os jogos trazem consigo um componente divertido e até prazeroso, sendo que este componente comprometeria o ambiente sério das aulas de Matemática.

Algo importante que consideramos ao adaptarmos o jogo de dominó tradicional para os conteúdos desejados, foi o de respeitar o aspecto jogo, considerando os aspectos apresentados por Smole *et al* (2008) sobre os jogos, que deve ser uma atividade para ser realizada em grupo, ter um vencedor, cooperação e a aceitação das diferenças enquanto jogam, as regras preestabelecidas e a possibilidade de criar estratégias. Caso o jogo não apresente essas características passa ser uma tarefa e não um jogo.

No entanto, é preciso levar em conta a necessidade da utilização criteriosa do material. Nacarato (2005) aponta para uma utilização inadequada dos materiais manipuláveis, quando esses são apenas utilizados para apresentar uma noção do conteúdo proposto e, após isso são esquecidos. A autora afirma que esta atitude traz como consequência o reforço da noção de que os materiais manipuláveis e os jogos servem apenas como um passatempo.

A autora salienta que o problema não está no uso dos materiais manipuláveis, já que sua importância é indiscutível, mas que é necessário utilizá-los de maneira apropriada. Ainda reforça que para obter êxito no processo de ensino é imprescindível que os educadores levem em consideração diferentes tendências educacionais para o ensino da matemática, não tendo como único foco apenas uma.

Considerando os problemas citados anteriormente ao trabalharmos com esses recursos durante o PROMAT buscamos prevê-los e solucioná-los, levando em conta as condições físicas da sala de aula, o número de alunos por encontro e a organização em grupos (individual, duplas, trios e quartetos), o tempo de cada encontro para possibilitar a aprendizagem e reflexão sobre cada um dos materiais manipuláveis.

Uma alternativa eficaz durante a utilização dos materiais e jogos foi o incentivo aos alunos a realizarem registros das atividades, por exemplo, ao utilizarmos o Dominó de Proporções, entregamos junto ao kit do jogo, um gabarito para completarem com as questões do jogo, assim facilitando o andamento da atividade e permitindo que os alunos obtivessem anotações pertinentes a aula.

Durante o andamento dessa atividade observamos a interação dos alunos com o material disponibilizado. Em primeiro momento tiveram dúvidas com relação ao conteúdo proposto, mas no decorrer do jogo sanaram suas dúvidas e conseguiram concluir o desafio apresentado.

Ao trabalharmos os jogos no PROMAT, como o já referido, pensamos na adaptação de jogos populares, para equilibrar o tempo da realização do jogo durante aula, não sendo necessário a apresentação detalhada do modo de jogar, pois as regras já são conhecidas, permitindo o melhor aproveitamento da aula.

Outro material também utilizado no PROMAT foram barbantes no conteúdo de proporcionalidade, que possibilitaram trabalhar um conceito matemático através de material acessível e viável, sendo uma ferramenta que facilitou a compreensão do conteúdo.

Dessa forma, salientamos a importância do uso adequado desses recursos em sala de aula para auxiliar no ensino e a aprendizagem, para tanto, é necessário que os professores busquem conhecer e fundamentar os materiais que serão utilizados em sala de aula, salientando que esses recursos devem ser utilizados em todas as faixas de escolaridade, inclusive no Ensino Médio.

3 A experiência com os jogos de dominó

No segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), está prevista, na grade curricular como obrigatória, a disciplina de Tendências em Educação Matemática. Como alunas da referida Licenciatura, cursamos a disciplina. Uma das atividades avaliativas dessa disciplina foi a de cada grupo apresentar uma das tendências em Educação Matemática aplicada a uma situação de ensino. Assim, escolhemos para a tendência Jogos na Educação Matemática apresentar o Dominó de Funções.

O Dominó de Funções foi uma adaptação do jogo apresentado no projeto Matemática e

suas tecnologias da Fundação CECIERJ. Buscamos compreender a forma e os objetivos do jogo, conforme disponibilizados pela Fundação, (RIO DE JANEIRO, 2019). Paralelamente a isso, buscamos aprofundar os conhecimentos referentes aos registros de representações semióticas, o qual fundamenta teoricamente a utilização do jogo em sala de aula.

O jogo possui no total 24 peças e cada peça é dividida em duas, mantendo as origens do jogo de dominó tradicional. No jogo são utilizadas 12 funções de primeiro grau e cada função apresenta 4 representações semióticas das quais são: Representação algébrica, linguagem textual: interceptos, representação tabular e a representação gráfica, como apresentado nas imagens abaixo.

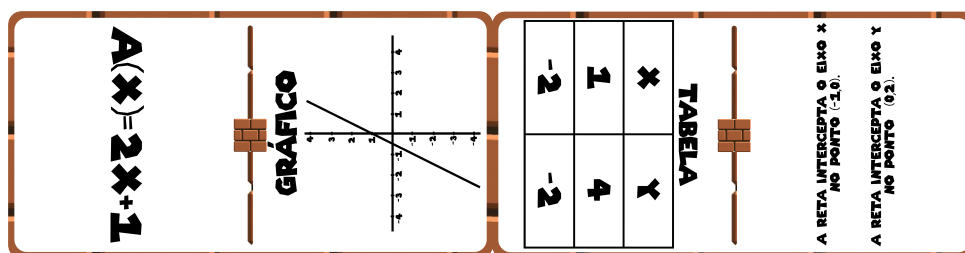


Figura 1: Duas peças do Dominó de Funções.

De acordo com Damm (1999) “[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação”. (*apud* VERTUAN, 2007, p.19). Levando isso em consideração, e que a utilização de uma única representação pode induzir o estudante a identificar o conceito com a representação, nos valem dos pressupostos da teoria das representações semiótica e tivemos como objetivo abordar quatro representações simultaneamente para a função de primeiro grau. A ideia foi juntamente romper com a forma linear que frequentemente o conteúdo de função do primeiro grau é apresentado aos alunos, seguindo a ordem de primeiro a representação algébrica, depois a tabular e somente ao final o gráfico. Muitas vezes uma representação na linguagem natural é deixada de fora. A nossa preocupação era fazer com que os estudantes não priorizassem uma representação em detrimento de outra.

Durante o PROMAT adaptamos o jogo de Dominó de Funções para o conteúdo da propriedade fundamental da proporcionalidade, também conhecido como regra de três, o Dominó das Proporções, mantendo como foco o uso das representações. O jogo também possui 4 representações sendo elas: Problema (enunciado), proporção, expressão algébrica e resultado numérico. Essa adaptação é constituída de 24 peças possuindo 12 problemas retiradas de Rio de Janeiro (2019, p. 115-125).

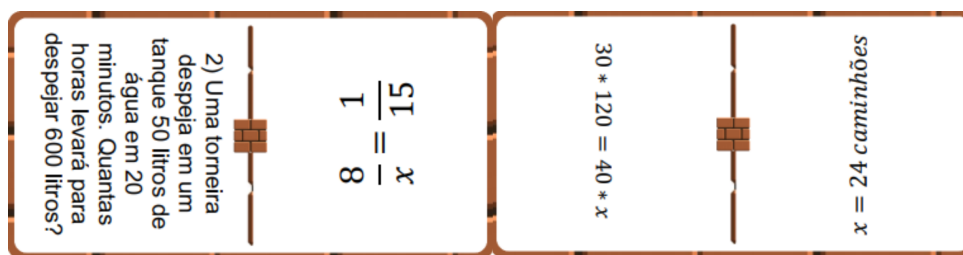


Figura 2: Duas peças do Dominó das Proporções.

Nesse contexto, durante o jogo os alunos precisam reconhecer o problema, a proporção equivalente ao problema, a expressão algébrica encontrada por meio da propriedade fundamental da proporção e o resultado numérico, trabalhando assim todo o conteúdo apresentado anteriormente aos discentes. Outro desafio presente durante o jogo foi a de identificar as proporções diretamente e inversamente proporcionais.

Uma necessidade verbalizada pelos alunos, após a aplicação do Dominó de Funções, foi a de obterem um registro escrito do conteúdo estudado. Porém, a fim de não reforçar a ideia de jogo como um passatempo ou um momento de descanso, foi que na aplicação do Dominó das Proporções fizemos diferente. Neste jogo realizado no PROMAT, entregamos junto ao material do jogo uma folha contendo o enunciado de todas as questões do dominó das proporções. Acreditamos que isso fez com que nossa aplicação fizesse o jogo se aproximar mais de um instrumento para sistematizar o conhecimento científico do que apenas um momento de descanso.

Após o término do PROMAT realizamos uma pesquisa online com os alunos referente a satisfação em relação a cada um dos encontros do projeto, por meio de um formulário, sendo uma pesquisa não obrigatória e anônima. Uma das questões do formulário era para atribuição de uma nota variando entre um a cinco, avaliando o quanto progrediram em relação ao conteúdo de Regra de Três, sendo um, pouca evolução até cinco, para máxima evolução. Todos os participantes responderam com a nota máxima, cinco. Isso nos fortaleceu o quão gratificante se mostrou nosso estudo, aprimoramento, construção e aplicação do jogo no ensino de Razões e Proporções.

Outra questão, referente à pesquisa online, que merece destaque foi a que revelou o quanto os alunos gostaram de sua experiência de aprendizagem com os jogos e materiais manipuláveis do projeto. Segue algumas transcrições de respostas para exemplificar a nossa satisfação diante do interesse dos alunos: “Achei que ajudou na fixação do conteúdo o que eu mais gostei foi do dominó”, “Muito bom, aquele dominó do Mario”, “Uma maneira diferente de aprender. O que eu mais gostei foi o dominó”, “Gostei de todos, mas meu preferido foi o super dominó”.

A experiência nos fez confiar que o Dominó das Proporções contribuiu com a aprendizagem e o interesse dos alunos pela Matemática.

Conclusões

Acreditamos que estes jogos de dominós apresentados podem ser aprimorados, a partir de nossa primeira experiência com estes. Por exemplo, no dominó das funções, acrescentaríamos mais representações semióticas em cada um deles, ou seja, incluir mais peças no jogo. No jogo de dominós das funções podemos utilizar a representação da função a partir do Diagrama de Venn, descrever a função por meio de seus coeficientes linear e angular e também descrever a lei da função por meio da língua materna, por exemplo “Multiplica o número por três e a este valor adiciona dois”. Para o jogo de Dominó das proporções é possível acrescentar duas cartas coringas com as escritas “diretamente proporcional” ou “inversamente proporcional”, chama a atenção para o aspecto das grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Consideramos ainda que os jogos de dominó possam ser adaptados a outros conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

O trabalho com jogos em sala de aula na Matemática ainda apresenta desafios a serem encarados, no entanto é importante sempre ser lançado um olhar atento e bem fundamentado matematicamente e do ponto de vista da Educação Matemática para o seu aprimoramento, gerando mais confiança e proveito para a aprendizagem na sua utilização em aulas de Matemática.

Esta trajetória pela qual passamos, primeiro na disciplina de Tendências, ao conhecer um jogo de dominó com o conteúdo de funções, pautado pela teoria dos registros das representações semióticas, culminando com a construção do Dominó das Proporções, por nós, nos motiva a continuar estudando e nos empenhando a trazer para a sala de aula materiais que rompam com a rotina tradicional de sala de aula, sempre com forte respaldo teórico pedagógico e científico.

Agradecimentos

Agradecemos a nossa orientadora Andréia Büttner Ciani, por ter nos auxiliado e orientado durante a nossa regência e na escrita desse artigo. Também agradecemos a professora Arleni Elise Sella Langer por ter nos auxiliado como regente da disciplina de Tendências em Educação Matemática e da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I.

Referências

- DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p. 135-154.
- NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no Concreto**. Disponível em: <<https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/76/43>>. Acesso em: 19 jul. 2019.
- RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Ciência e Tecnologia. Secretaria de Estado de Educação. Governo do Estado do Rio de Janeiro. Fundação CECIERJ. **Matemática e suas**

tecnologias: volume 1, Módulo 2. Disponível em:

<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/eja/recurso-multimedia-professor/matematica/novaeja/m2u14/Matematica_Mod02_Professor_unid4.pdf>. Acesso em: 22 set. 2019.

SMOLE, Kátia Stocco *et al.* **Cadernos do Mathema:** Jogos de Matemática de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. 2007. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Derivabilidade e diferenciabilidade no ensino do cálculo

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
ppdurandlazo@gmail.com

Resumo: Discute-se o uso dos termos *derivada de uma função num ponto*, *diferencial de uma função num ponto*, *função derivada* e *função diferencial* no contexto das disciplinas de Cálculo. Constatou-se que as definições nem sempre correspondem ao quadro teórico que a Análise oferece e como os abusos de linguagem e de notação escondem ou distorcem a verdadeira natureza destes objetos.

Palavras-chave: Cálculo; Derivabilidade; Diferenciabilidade.

Introdução

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciência e Tecnologia estudam-se os conceitos, propriedades e aplicações das derivadas de funções reais de variável real. Pretende-se, através da leitura de alguns textos de frequente uso, constatar se as definições se correspondem com as dadas nos textos de Análise. A Seção 1. trata dos conceitos de Derivada e Diferencial. A Seção 2. trata acerca da derivada de uma função num ponto e da função derivada. Finalmente, na Seção 3. define-se a diferencial de uma função num ponto e a diferencial de uma função.

1 Derivada e Diferencial

A *derivabilidade* e a *diferenciabilidade*, são conceitos fundamentais no Cálculo e por isso formam parte do conteúdo das disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciências e Engenharia. Trata-se então de verificar se as definições dadas no ensino, particularmente nos textos, se correspondem com às dadas num marco teórico de um nível aceitável na matemática. Iniciemos esta tarefa comentando definições encontradas em dois textos.

1.3 A Derivada

Suponha que uma curva seja o gráfico de uma função $f(x)$. Geralmente é possível obter a fórmula que fornece a inclinação da curva $y = f(x)$ em cada ponto. Esta fórmula para a inclinação é chamada de *derivada* de $f(x)$ e é escrita $f'(x)$. Para cada valor de x , $f'(x)$ fornece a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto com primeira coordenada x . [...]

O processo de obter $f'(x)$ para uma dada função $f(x)$ é chamado de *diferenciação*. (GOLDSTEIN, 2000, P.70)

Aqui, **derivada é uma fórmula para a inclinação** (da curva $y = f(x)$) e **diferenciação** (talvez deveria se dizer *derivação*) **é o processo de obter $f'(x)$** , isto é, de aplicar a fórmula.

É compreensível a necessidade de orientar-se pelo desejo de uma aplicação “prática” imediata do conceito, porém isto não deveria fazer-se dando definições que não caracterizam de forma precisa os objetos. A seguir extraímos também de um texto de cálculo a definição de diferencial. Neste texto define-se primeiro a **diferencial da variável dependente** e logo a **diferencial da variável independente**.

4.20.2 Diferencial Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x . Definimos:

- (a) a diferencial da variável independente x , denotada por dx , como $dx = \Delta x$.
- (b) a diferencial da variável dependente y , denotada por dy , como

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

De acordo com a definição anterior, podemos escrever

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Assim, a notação $\frac{dy}{dx}$ já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente de diferenciais. (FLEMMING, 2006, p.174).

Das definições dadas, se deduz a interpretação de derivada como quociente de diferenciais. Isto é, **derivada é quociente de diferenciais**.

Se consideramos que a Análise é, de alguma forma, a fundamentação do Cálculo, registremos algumas definições dadas em textos desta disciplina. Vejamos primeiro a seguinte definição de **função diferenciável num ponto**.

Definition.

On dit qu'une fonction f est **différentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire $h \mapsto lh$ et une fonction $h \mapsto \alpha(h)$ définie sur un intervalle I de centre zéro telles que

$$\begin{aligned} (\forall h \in I) : \quad & f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\alpha(h) \\ \text{avec} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

L'application : $h \mapsto lh$ est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fonction f au point x_0 ou encore **différentielle** de f au point x_0 . On la note df_{x_0} . Le nombre l s'appelle le coefficient de la différentielle de f au point x_0 . On a donc pour tout h réel

$$df_{x_0}(h) = lh$$

(GOURION, 1971, p.50).

Observe-se que é a função a que tem diferencial num ponto e não suas variáveis dependente e independente. Observe também que a **diferencial de uma função num ponto é uma função linear e não um número**.

Definição 1. f é diferenciável no ponto x_0 se existe uma função linear $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto ah$ e uma função $h \mapsto \varphi(h)$ definida num intervalo I de centro 0 tais que

$$\forall h \in I : f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

A função linear $h \mapsto ah$ chama-se a *diferencial da função f no ponto x_0* , denota-se df_{x_0} . Assim,

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; df_{x_0}(h) = ah$$

Théorème et définitions.

Dire que f est différentiable au point x_0 est équivalent à dire que la fonction:

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite au point $h = 0$. Cette limite, quand elle existe, est le coefficient de la différentielle de f au point x_0 . Cette limite, quand elle existe, s'appelle **dérivée** de f au point x_0 et on dit que f est **dérivable** au point x_0 .

(GOURION, 1971, p.50).

Definição 2. f é derivável no ponto x_0 se a função $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ definida num intervalo I de centro 0 tem limite em $h = 0$. Isto é,

$$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

O número real a chama-se a derivada da função f no ponto x_0 e denota-se $f'(x_0)$. Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Teorema 3. *Sejam f uma função definida num Intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Então*

$$f \text{ é derivável em } x_0 \Leftrightarrow f \text{ é diferenciável em } x_0$$

Prova.

$(\Rightarrow)$ f é derivável em x_0 . Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \right) = 0$$

Fazendo $\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a$. Temos que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Logo, f é diferenciável em x_0 .

$(\Leftarrow)$ f é diferenciável em x_0 . Então

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Donde,

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

Logo f é derivável em x_0 . □

2 Derivada de uma função num ponto e função derivada.

No texto citado a seguir definem-se *função derivável num ponto*, *função derivável num intervalo* e *função derivada*.

DÉFINITION 16.1

- Soient I un intervalle ouvert, x_0 un élément de I et f une application définie sur I . On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0 .

- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si pour tout $x \in J$, f est dérivable en x . On appelle dans ce cas dérivée de f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x .

(BALAC, 2009, p.747)

A seguir se enuncia o teorema que liga os conceitos de *função derivável num ponto* e *função direnciável num ponto*. Nele afirma-se também sua equivalência.

Le théorème fondamental de la dérivation en un point

a) Le théorème:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I .

Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour tout h tel que $x_0 + h$ appartienne à I , on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$ (le taux d'accroissement de f au point x_0 admet a por limite en zéro).

[...]

b) Définitions :

Pour exprimer qu'une fonction satisfait 1. ou 2. du théorème fondamental, on dit que f est dérivable au point x_0 . De plus, le nombre réel a est appelé *nombre dérive de f au point x_0* .

L'écriture $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ est appelée *développement limité à l'ordre 1 de f au point x_0* . (TERRACHER, 1987, p.285)

Prova. ¹ Seja a um número real qualquer. Consideremos a função φ definida por:

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \quad \text{quando } x_0 + h \in I \text{ e } h \neq 0;$$

Então, para todo h tal que $x_0 + h \in I$ (incluindo $h = 0$):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$$

¹Traduzido pelo autor deste artigo do texto original de TERRACHER

Da definição de limite de uma função em zero segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

□

Anotemos aqui algumas observações:

1. $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ e $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. O teorema fundamental diz que

$$f \text{ é derivável no ponto } x_0 \Leftrightarrow f \text{ é diferenciável no ponto } x_0.$$

3. Pode-se observar que **ser derivável num ponto** não é o mesmo que **ser diferenciável num ponto**. São sim **equivalentes**. De forma natural, **a derivabilidade** deveria significar a **existência da derivada** enquanto que a **diferenciabilidade** teria que significar a **existência da diferencial**.
4. Também a derivada de f no ponto x , $f'(x)$, é o coeficiente da diferencial de f no ponto x :

$$df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

5. A escrita $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ chama-se **desenvolvimento limite de ordem 1 de f no ponto x_0** .

Em muitos textos de cálculo os autores associam a diferenciabilidade com a existência da derivada. Além de alguns anteriormente citados, temos, por exemplo:

We recall that a function f is *differentiable* at a point x_0 if it has a derivative at x_0 . When we say that f is *differentiable*, we mean that it has a derivative at every point of its domain. (MOISE, 1972, p.89)

Aqui, o autor lembra definições dadas: uma função f é **diferenciável** em um ponto x_0 se tiver **derivada** em x_0 . Quando dizemos que f é **diferenciável**, queremos dizer que ela tem **derivada** em cada ponto de seu domínio.²

A seguir uma definição de *função derivada* f' :

Para qualquer função f , definimos a função derivada f' por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que este limite exista. Dizemos que a função é **diferenciável** ou **derivável** em qualquer ponto a em que a função derivada exista. (HUGHES-HALLETT, 1999, p.109)

Nesta definição resulta pouco claro qual é o domínio da função derivada f' . Tentemos reescrever esta definição: Seja $A = \text{Dom}_f \cap \{a | f'(a) \text{ existe}\}$, então $f' : A \mapsto \mathbb{R}; a \mapsto f'(a)$.

Finalmente, damos uma definição de *função derivada de uma função f* .

²O sublinhado e a tradução são do autor deste artigo.

Definição 4. Seja f uma função definida num intervalo I . Diz-se que f é derivável num intervalo $J \subset I$, quando é derivável em todo ponto deste intervalo. A função de J em $\mathbb{R}$ que a todo número real x de J associa a derivada de f no ponto x , chama-se derivada de f e denota-se f' . Assim, $f' : J \rightarrow \mathbb{R}$; $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

3 Diferencial de uma função num ponto e Diferencial

O primeiro paragrafo da seguinte citação textual merece um comentário. Nele se observa o fato que a definição da derivada dada não permite generalizar de forma natural a noção de derivada as funções de varias variáveis. Para verificar este fato é suficiente constatar que a expressão $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ não tem sentido para $h \in \mathbb{R}^n$, se $n > 1$.

La définition de la dérivée donnée à la définition 16.1, page 747, ne permet pas de généraliser de manière naturelle la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables. Cette généralisation passe par la notion de *différentielle* que nous allons étudier dans le cas des fonctions d'une variable réelle. (...

DÉFINITION 16.3 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **différentiable en** $x_0 \in I$ s'il existe une application ϵ définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tel que

$$(\forall h \in V) : f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

L'application linéaire $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto \alpha h$$

est appelée différentielle de f en x_0 . (BALAC, 2009, p.758)

Para superar esta limitação, podemos tomar em consideração que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha(h)|}{|h|} = 0 \quad \text{onde} \quad \alpha(h) = a \cdot h. \end{aligned}$$

Aparece assim a diferencial de f no ponto x_0 como a função linear α definida por $\alpha(h) = a \cdot h$. No caso de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ poderia considerar-se as normas e a expressão

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{onde} \quad \alpha(h) = a \cdot h \text{ com } a \in M_{\mathbb{R}}(m, n).$$

A seguinte citação textual enuncia a equivalência de *ser derivável num ponto* e *ser diferenciável num ponto* e que a diferencial de f em x_0 é a função $h \mapsto f'(x_0) \cdot h$.

PROPOSITION 16.6 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction application de I dans $\mathbb{R}$. f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 . De plus, la différentielle de f en x_0 est

$$df_{x_0} : h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0) \cdot h$$

(BALAC, 2009, p.759)

A seguinte definição, extraída de um texto de Análise, assim como a definição citada acima, não revela de forma imediata a natureza da diferencial de uma função num ponto. Só mais na frente fala da função linear correspondente e a define como a diferencial da função no ponto.

6°) **Différentielle.**-a) On dit que la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ est différentiable au point x_0 de $\mathcal{C}$ s'il existe un nombre α tel que la fonction ϵ définie, pour $h \neq 0$, par la formule

$$(3) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + |h| \cdot \epsilon(h)$$

admette la limite 0 quand h tend vers 0. (On suppose $|h|$ assez petit pour que $x_0 + h \in \mathcal{C}$). (CANAG, 1972, p.120).

Observe-se que nesta definição, assim como na definição 16.3 citada anteriormente, se diz que **existe um número** α e na expressão (3) aparece o termo $\alpha \cdot h$. Pode-se de uma forma natural identificar o numero real α com a função linear $h \mapsto \alpha \cdot h$. Esta identificação é possível pela bijeção $\mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \alpha \mapsto \psi_\alpha$, onde $\psi_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \psi_\alpha(h) = \alpha \cdot h$.

Proposição 5. *Uma função ψ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(h) = \alpha \cdot h$.*

Prova. Seja α um número real e seja a função $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \psi(h) = \alpha \cdot h$. Temos que

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R}, \forall \hat{h} \in \mathbb{R} : \quad & \psi(h + \hat{h}) = \alpha \cdot (h + \hat{h}) = \alpha \cdot h + \alpha \cdot \hat{h} = \psi(h) + \psi(\hat{h}) \\ \forall h \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad & \psi(\lambda \cdot h) = \alpha \cdot (\lambda \cdot h) = \lambda \cdot (\alpha \cdot h) = \lambda \cdot \psi(h) \end{aligned}$$

Logo ψ é linear. Suponhamos agora que $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é linear. Então

$$\forall h \in \mathbb{R} : \psi(h) = \psi(h \cdot 1) = h \cdot \psi(1) = \psi(1) \cdot h$$

Fazendo $\alpha = \psi(1)$, temos que existe α tal que $\psi(h) = \alpha \cdot h$ □

Donde, pode-se expressar a definição acima da forma seguinte: a função f definida sobre $\mathcal{C}$ é diferenciável num ponto x_0 de $\mathcal{C}$ se existe uma função linear ψ definida por $\psi(h) = \alpha \cdot h$ tal que a função ϵ definida para $h \neq 0$, pela fórmula

$$(3) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \psi(h) + |h| \cdot \epsilon(h)$$

admite limite 0 quando h tende para 0.

Prova-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha = f'(x_0)$$

Finalmente, dizer que uma função f é diferenciável em x_0 equivale a dizer que existe uma função linear ψ definida por $\psi(h) = f'(x_0) \cdot h$. Esta função linear ψ é a diferencial da função f no ponto x_0 que pode ser denotado por df_{x_0} para envolver na notação a função f e o ponto x_0 , isto é, $\psi = df_{x_0}$.

b) La forme linéaire $\mathfrak{L}$, sur $\mathbb{R}$, telle que $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \times h$ est dite *application différentielle de f au point x* . De la même façon que l'on désigne par y l'image par f de l'élément générique de $\mathcal{C}$, on désigne par dy l'image par l'application linéaire $\mathfrak{L}$ de l'élément générique de $\mathbb{R}$, que l'on conveint d'écrire dx au lieu de h . On a ainsi, au point considéré x de $\mathcal{C}$

$$(4) \quad dy = f'(x)dx$$

Par abus de langage, on dit que dy est la différentielle de f au point x .

On peut écrire aussi $d[f(x)] = f'(x)dx$,

ou, par abus d'écriture, $df = f'(x)dx$. (CANAG, 1972, p.120).

A forma linear $\mathfrak{L}$, sobre $\mathbb{R}$, tal que $\mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$ diz-se *aplicação diferencial de f no ponto x* . Do mesmo modo que designa-se por y a imagem por f do elemento genérico de $\mathcal{C}$, se designa por dy a imagem pela aplicação linear $\mathfrak{L}$ do elemento genérico de $\mathbb{R}$, resulta conveniente escrever dx em lugar de h . Se tem assim que no ponto considerado x de $\mathcal{C}$: (4) $dy = f'(x)dx$.

Por abuso de linguagem, se diz que dy é a diferencial de f no ponto x .

Pode-se escrever também $d[f(x)] = f'(x)dx$,

ou, por abuso de escrita, $df = f'(x)dx$.³

Aqui se caracteriza a **diferencial de uma função f num ponto x** como uma aplicação linear $\mathfrak{L}$ sobre $\mathbb{R}$. Assim,

$$\mathfrak{L} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto \mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$$

Das definições dadas na seção anterior e do Teorema Fundamental, temos que

$$\mathfrak{L} = df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

A notação proposta nos diz que $dy = f'(x) \cdot h = df_x(h)$, isto é, a imagem de h pela aplicação linear df_x . Aplicando a própria definição à função $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; id_{\mathbb{R}}(x) = x$, temos que

$$d[id_{\mathbb{R}}]_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto id'_{\mathbb{R}}(x) \cdot h = 1 \cdot h = h = id_{\mathbb{R}}(h)$$

Assim, $d[id_{\mathbb{R}}]_x = id_{\mathbb{R}}$. Fazendo o abuso de notação pelo qual se identifica uma função g com sua imagem $g(x)$, temos $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ e $id_{\mathbb{R}}(h) = h$. Logo, por detrás da expressão de que resulta conveniente escrever dx em lugar de h , se esconde um abuso de notação, $dx = h$. Isto justifica também a notação $dy = f'(x) \cdot dx$.

Examinemos as definições de diferencial dadas em alguns textos de cálculo frequentemente usados nos cursos de graduação.

³ $y = f(x)$ com $x \in \mathcal{C}$ (Intervalo de definição de f). Traduzido do texto original em francês pelo autor deste artigo.

4.9.1. DEFINIÇÃO

Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de y** , denotada por dy , será dada por

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (3)$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x . [...]

4.9.2. DEFINIÇÃO

Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de x** , denotada por dx , será dada por $dx = \Delta x$

onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f' .

Das definições 4.9.1 e 4.9.2, $dy = f'(x)dx$ (5)

Dividindo ambos membros de (5) por dx , temos $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ se $dx \neq 0$

Essa relação expressa a derivada como o quociente de dois diferenciais. (LEITHOLD, 1994, p.269-270).

Aqui define-se primeiro a **diferencial de y** em seguida a **diferencial de x** , deduz que $dy = f'(x)dx$ e, finalmente que esta relação expressa a *derivada como o quociente de dois diferenciais*. Aceitando os abusos de linguagem e de notação contidos nesta definição, a definição da “diferencial da variável dependente” se faz desnecessária pois pode-se obter a partir da definição da “diferencial da variável independente”: pondo $g(x) = x$, temos $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $dx = g'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Até aqui $\frac{dy}{dx}$ tem sido visto como uma simples notação para a derivada de $y = f(x)$. O que faremos a seguir é interpretar $\frac{dy}{dx}$ como um quociente de dois acréscimos. Inicialmente, vamos olhar dx como um acréscimo em x e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo dy . [...]

Fixado x , podemos olhar para a *função linear* que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, onde $dy = f'(x) \cdot dx$. Tal função denomina-se *diferencial de f em x* , ou, simplesmente, *diferencial de $y = f(x)$* . (GUIDORIZZI, 2008, p.192)

O último parágrafo do texto acima citado, menciona o fato de que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$; $dx \mapsto dy = f'(x) \cdot dx$ é linear e define como *diferencial de f em x* . Não se explica como é que dx resulta variável independente.

8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea $y = f(x)$, una función definida en cada punto del intervalo abierto I . Decimos que $f(x)$ es diferenciable (o derivable) en un punto x de I si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En este caso, dicho límite se designa por $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ o $D_x f(x)$, y se llama la derivada de $f(x)$ en el punto x . (KONG, 2001, p.199)

A definição citada acima, eliminando os abusos de notação, diz: Seja f uma função definida por $y = f(x)$ em cada ponto x do intervalo I . Diz-se que f é diferenciável (**ou derivável**)⁴ num ponto x de I se existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Assim, se associa a derivabilidade com a existência de derivada. Tratando-se da diferencial, temos:

⁴O sublinhado e a tradução são do autor deste artigo

9.8 DIFERENCIALES.

9.8.1 DEFINICIÓN

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x . La diferencial de y (en el punto x , y para un incremento Δx) es dada por

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x .

9.8.2 OBSERVACIONES. [...]

2) La diferencial df es una función de las dos variables x y Δx , donde x es cualquier punto donde existe $f'(x)$ y Δx es un número real arbitrario. Así, con propiedad debería escribirse

$$df = df(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x. \text{ (KONG, 2001, p.310)}$$

Nesta definição destacamos a expressão “diferencial de y (**no ponto x , y para um acréscimo Δx**) é dada por $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ ”. Aquí, podemos entender de forma implícita que há uma função que mantém constante x , considera Δx variável e cujo valor funcional (imagem) é dada por $f'(x) \cdot \Delta x$. A observação 2 do texto acima citado é importante pois caracteriza a diferencial df da função f como uma função de duas variáveis: $df : (x, \Delta x) \mapsto f'(x) \cdot \Delta x$. Como Δx é arbitrário, pode-se escrever $df : (x, h) \mapsto f'(x) \cdot h$. Fixando x temos $df(x, h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$. Assim, chegamos facilmente ao conceito de *diferencial da função f no ponto x* .

Examinemos agora como o autor obtém a diferencial dx a partir da definição 9.8.1:

9.8.4 LA DIFERENCIAL dx .

(1) Para la función $I(x) = x$ la diferencial es, de acuerdo a la definición 9.8.1,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x \\ dx &= \Delta x \end{aligned}$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x .

(2) Si $y = f(x)$ es una función diferenciable en el punto x , entonces df se expresa como un múltiplo de la diferencial dx . En efecto,

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \text{ (pues } dx = \Delta x \text{ por (1))} \\ dy &= f'(x) \cdot dx \end{aligned}$$

(3) Observemos que tenemos $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (en la notación de derivada) si y sólo si $dy = f'(x)dx$ (en la notación de diferenciales). (KONG, 2001, p.312)

De forma natural aparece $dx = \Delta x$ no caso particular da diferencial da função definida por $I(x) = x$. Donde também deduz que a derivada $f'(x)$ é o quociente dos **valores** das diferenciais correspondentes.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a, b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a um número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, donde $\alpha \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Multiplicando todos los términos de la ultima igualdad por Δx , obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \quad (1)$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \rightarrow 0$, el producto $f'(x)\Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx . El producto $\alpha\Delta x$ es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx ya que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre [cuando $f'(x) \neq 0$] de parte *principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx . El producto $f'(x)\Delta x$ se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy ou $df(x)$. (PISKUNOV, 1977, p.115)

O parágrafo final desta citação, a partir da igualdade (1) que caracteriza a diferenciabilidade, diz que Δy está composta como soma de dois termos, o primeiro dos quais é linear com relação a Δx e se denomina a diferencial da função. Como em outros, o conceito de diferencial de uma função num ponto não se explicita e fica escondida detrás dos abusos de linguagem e de notação.

DIFERENCIAIS

Os símbolos dy e dx que apareceram na derivada são chamados **diferenciais**, e nosso próximo objetivo é definir estes símbolos, de tal forma que se possa tratar dy/dx como uma razão. Com esta finalidade, vamos considerar x como fixo e definir dx como uma variável independente, para a qual possa ser atribuído um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x , então *definimos* dy pela fórmula

$$dy = f'(x)dx$$

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Assim sendo atingimos a nossa meta definindo dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$. (HOWARD, 2000, p.212)

Segundo isto, dx e dy são símbolos que apareceram na derivada. Para tratar a derivada $\frac{dy}{dx}$ como uma razão, fixa x e define dx como variável independente (muito difícil de explicar!). Na sequência define dy pela fórmula $dy = f'(x)dx$. Assim, dx e dy são números e se $dx \neq 0$, tem-se que dy/dx é uma razão (quociente). Tentemos reescrever esta definição: se x é fixo e f é derivável em x , $f'(x)$ é fixo (constante). Logo temos uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R} : h \mapsto f'(x) \cdot h$. Se f é definida por $y = f(x)$, denotemos $dy = f'(x) \cdot h$. Para a função definida por $g(x) = x$, tem-se $dx = g'(x) \cdot h = 1 \cdot h = h$. Assim, $dx = h$, daí $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x)$ se $h \neq 0$.

Finalmente, vejamos a definição de **diferencial de uma função**:

DÉFINITION 16.4 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ admettant une différentielle df_{x_0} en tout $x_0 \in I$. On appelle différentielle de f , et on note df , l'application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $df : x_0 \in I \mapsto df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (BALAC, 2009, p.760)

Conforme a definição acima citada a *diferencial de uma função* f , df , é uma aplicação de I em $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, isto é, $df \in \mathcal{F}(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Assim,

$$\begin{aligned}df &: I \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \\x &\mapsto [df](x) = df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \\h &\mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h.\end{aligned}$$

Referências

- CANAG, G.; RAMIS, E. and COMMEAU, J. **Traité de Mathématiques Spéciales: 2 Analyse**. Masson et C^{ie} Éditeurs: Paris, 1972.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1 - 3^{ra} edição. Editora Harbra Ltda.: São Paulo, 1994.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Volume 1 - 5^a edição. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: Rio de Janeiro, 2008.
- KONG, Maynard. **Cálculo Diferencial**. Cuarta Edición. Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica: Lima, 2001.
- MOISE, E. **Calculus**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Wesley Publishing Company, Inc.: United States of America, 1972.
- GOURION, M. **Analyse** Collection Queysanne-Revuz: Mathématique Tome 2. Fernand Nathan Editeur: Paris 1971.
- GOLDSTEIN, L.J.; LAY, D.C.; SCHNEIDER, D.I. **Matemática Aplicada**. 8^a edição. Bookman: Porto Alegre, 2000.
- FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**. Pearson Prentice Hall: São Paulo, 2006.
- PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Tomo 1 3^a edição. Editorial MIR: Moscú, 1977.
- HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A.M. et al. **Cálculo e Aplicações**. Editora Edgard Blücher Ltda.: São Paulo, 1999.
- HOWARD, A. **Cálculo: um novo horizonte**. Volume 1- 6^a edição. Bookman: São Paulo, 2000.
- BALAC, S.; STURN, F. **Algèbre et analyse**. 2^e edition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes: Lyon, 2009.
- TERRACHER, P. et all. **Mathématiques 1e. S et E Analyse**. Hachete: France, 1987.

Índice de autores

- Alessandra dos Santos, 267, 281
Alex Augusto Nunes Machado, 65, 87
Amarildo de Vicente, 317
Ana Carolina Souza Lisboa, 65, 121
Andréia Büttner Ciani, 181, 307
Arlení Elise Sella Langer, 143

Bruno Gonçalves, 55

Cintya Akemi Okawa, 65, 109

Daniela Maria Grande Vicente, 19, 161

Eduarda Pereira de Assis, 327

Fabiana Fatima Delabona, 151
Fabiana Magda Garcia Papani, 75, 133
Fernanda Carla de Oliveira, 281
Fernanda Paula John, 203
Fernando Dias de Oliveira Heidercheidt, 221
Flavio Roberto Dias Silva, 215

Gabriela Artini da Silva, 181, 191
Gabriela de Melo Devens, 99
Guilherme Gasparini Lovatto, 181, 191
Guilherme Vieira Bochi, 231

Henrique Zanelatto, 295

Igor Alipio Bresola Carabolante, 161

Janaina Maria de Lima Gonçalves, 237
João Alfredo Simon Santos, 275
Juliana Terezinha de Oliveira Moura, 99

Kaio Arlei Strelow, 75
Karla Katrine Pereira Cazarotto, 143

Laís Dri da Rosa, 317
Laura Massuda Crema, 133, 143

Lucas Campos de Araújo, 171, 237
Luciana Pagliosa Carvalho Guedes, 151
Lyncon Cezar de Brito, 267

Mariana da Rosa, 31, 43, 317
Mariana Thais Garcia, 143, 289
Matheus Alexandre Alves Anzolin, 249, 255
Milena Cristina Heydt, 215

Nadya Beatriz Antunes Barroso, 281
Natalia Cristina Araújo Taques, 327

Pamela Gonçalves, 99, 307
Paulo Domingos Conejo, 31, 43, 249, 255
Pedro Pablo Durand Lazo, 335

Renan Paglarini Davela, 267

Sandro Marcos Guzzo, 87, 109, 121, 203
Suenir Barreto dos Anjos, 143

Thalia Falquievicz Corassa, 55
Tiago Emanuel Klüber, 289, 295

Valdecir de Oliveira Teixeira, 11
Victoria Maria de Oliveira, 65
Viviane dos Santos Costa, 19